

## Osnove matematične analize

2. pisni izpit  
31. januar 2023

*Odgovori naj bodo primerno utemeljeni. Veliko uspeha!*

1. [9] Z indukcijo dokažite, da za vse  $n \in \mathbb{N}$  velja neenakost:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{n}{2}.$$

2. (a) [5] Izračunajte  $(2 + 2\sqrt{3}i)^{2023}$ .  
(b) [5] Poiščite vsa kompleksna števila  $z$ , ki so rešitve enačbe  $z^2|z| = 2 + 2\sqrt{3}i$ .  
Nasvet: Število  $z$  zapišite v polarni obliki.

3. Dano je zaporedje:

$$a_n = \frac{2^n + n}{3^n - 1}.$$

- (a) [6] Dokažite, da je zaporedje padajoče. Ali je tudi konvergentno?  
(b) [5] Iz zaporedja sestavite vrsto  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  in ugotovite, ali konvergira.
4. Funkcija hiperbolični tangens je definirana s predpisom  $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .
- (a) [1] Določite definicijsko območje za  $\tanh(x)$ .  
(b) [2] Dokažite, da je  $\tanh(x)$  liha funkcija.  
(c) [5] Dokažite, da je  $-1 < \tanh(x) < 1$  in določite limiti  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x$  in  $\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x$ . Nato sklepajte o zalogi vrednosti in skicirajte graf funkcije  $\tanh(x)$ .  
(d) [2] Izpeljite izraz za inverzno funkcijo  $\tanh^{-1}(x)$ .
5. (a) [2] Naj bo  $f$  realna funkcija, definirana v neki okolici točke  $a \in \mathbb{R}$ . Zapišite  $\varepsilon - \delta$  definicijo zveznosti funkcije  $f$  v točki  $a \in \mathbb{R}$ .  
(b) [2] S sklicevanjem na definicijo zveznosti in ustrezno skico pojasnite, zakaj funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 2, \\ 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

ni zvezna v točki  $a = 2$ .

- (c) [4] Z uporabo definicije zveznosti dokažite, da je funkcija  $\sin(x)$  zvezna v poljubni točki  $a \in \mathbb{R}$ .  
Namig: Za razliko sinusov velja  $\sin(x) - \sin(a) = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}$ .  
(d) [2] Z uporabo prejšnje točke in pravil za operacije z zveznimi funkcijami utemeljite zveznost funkcij  $\cos(x)$  in  $\tan(x)$ .

## Rešitve

1. Trditev velja za  $n = 1$ , saj je  $1 \leq 1 + \frac{1}{2}$ . Denimo, da trditev velja za neko število  $n$ . Za  $n + 1$  potem dobimo

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n+1} \leq \left(1 + \frac{n}{2}\right) + \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \leq 1 + \frac{n+1}{2},$$

saj je  $-\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \leq 0$  za  $n \geq 1$ .

2. (a) S pretvorbo v polarni zapis  $2 + 2\sqrt{3}i = 4(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$  in uporabo de Moivreve formule dobimo rezultat  $4^{2023}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$ .
- (b) Če zapišemo  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , potem je  $z^2 = r^2(\cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi))$  in  $|z| = r$ . Upoštevamo še  $2 + 2\sqrt{3}i = 4(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$  in dana enačba preide v obliko

$$r^3(\cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi)) = 4(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}).$$

Sledi  $r = \sqrt[3]{4}$  in  $2\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  oziroma  $\varphi = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Rešitvi sta  $z_1 = \frac{\sqrt[3]{4}\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$  in  $z_1 = -\frac{\sqrt[3]{4}\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ .

3. (a) Zaporedje je padajoče, saj je razlika zaporednih členov ustreznega predznaka:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2^{n+1} + (n+1)}{3^{n+1} - 1} - \frac{2^n + n}{3^n - 1} \\ &= \frac{2^{n+1}3^n - 2^{n+1} - n - 1 + n3^n + 3^n - (2^n3^{n+1} - 2^n + n3^{n+1} - n)}{(3^n - 1)(3^{n+1} - 1)} \\ &= \frac{-2^n3^{n+1} - 2^n - (2n - 1)3^n + 2^{n+1}3^n - 1}{(3^n - 1)(3^{n+1} - 1)} = -\frac{2^n3^n + 2^n + (2n - 1)3^n + 1}{(3^n - 1)(3^{n+1} - 1)} < 0 \end{aligned}$$

- (b) Izračunamo kvocient zaporednih členov:

$$d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2^{n+1} + n + 1)(3^n - 1)}{(3^{n+1} - 1)(2^n + n)} = \frac{2^{n+1}3^n - 2^{n+1} - n - 1 + n3^n + 3^n}{2^n3^{n+1} - 2^n + n3^{n+1} - n}.$$

Sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{-2^{n+1} - n - 1 + n3^n + 3^n}{2^n3^n}}{3 + \frac{-2^n + n3^{n+1} - n}{2^n3^n}} = \frac{2}{3} < 1,$$

zato po kvocientnem kriteriju vrsta konvergira.

4. (a) Ker sta funkciji  $e^x, e^{-x}$  povsod definirani in pozitivni, je imenovalec v ulomku neničeln in zato  $D_f = \mathbb{R}$ .

- (b) Hitro preverimo, da je  $\tanh(-x) = \dots = -\tanh(x)$ .

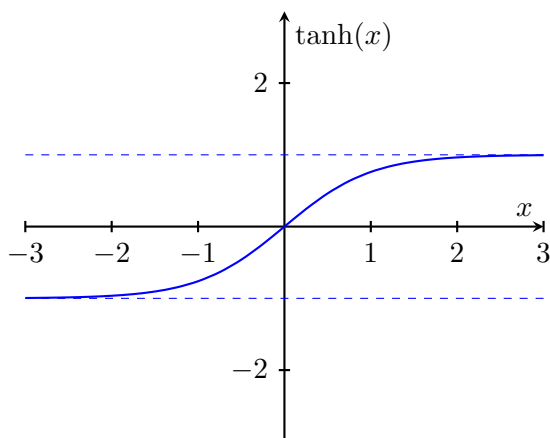
- (c) Desno neenakost  $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 1$  pomnožimo s (pozitivnim!) številom  $(e^x + e^{-x})$  in po preurejanju dobimo enakovredno neenakost  $0 < 2e^{-x}$ , ki je očitno veljavna. Podobno dokažemo tudi levo neenakost  $-1 < \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .

Eno limito izračunamo kot

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x} - 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1,$$

saj je zadnji kvocient oblike  $\frac{0}{\infty} = 0$ . Podobno dobimo, da je  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = -1$ .

Ker je funkcija zvezna (in naraščajoča), sklepamo, da je  $Z_f = (-1, 1)$  in skiciramo graf:



(d) Zapišemo  $x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$  in izrazimo  $y = \dots = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \tanh^{-1}(x)$ .

5. (a) Funkcija  $f$  je zvezna v točki  $a \in D_f$ , če za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja  $\delta > 0$ , da za vsak  $x$  iz  $|x - a| < \delta$  sledi  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .
- (b) Dana funkcija ni zvezna v točki  $a = 2$ , saj za  $\varepsilon = 1$  in poljuben  $\delta > 0$  velja  $|f(x) - f(a)| = 2 > \varepsilon$  za vsak  $x$  iz intervala  $(a - \delta, a)$ .
- (c) Pišimo  $f(x) = \sin(x)$  in naj bo  $\varepsilon > 0$  dano pozitivno število. Vzemimo  $\delta = \varepsilon$ . Potem iz  $|x - a| < \delta = \varepsilon$  sledi

$$\begin{aligned}
 |f(x) - f(a)| &= |\sin(x) - \sin(a)| \\
 &= \left| 2 \sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2} \right| \\
 &= 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x+a}{2} \right| \\
 &\leq 2 \left| \frac{x-a}{2} \right| \cdot 1 \quad (\text{saj je } |\sin \varphi| \leq |\varphi| \text{ in } |\cos \varphi| \leq 1) \\
 &= |x - a| \\
 &< \varepsilon,
 \end{aligned}$$

torej je  $f(x)$  zvezna v  $a$ .

- (d) Funkcija  $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$  je kompozitum dveh zveznih (sinusne in linearne), zato je zvezna. Funkcija  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  je kvocient dveh zveznih, zato je zvezna povsod, kjer je funkcija v imenovalcu neničelna, torej tudi povsod, kjer je  $\tan x$  definirana.