

# Osnove matematične analize

1. kolokvij

23. november 2022

Vsi odgovori morajo biti primerno utemeljeni. Oddajte urejen izdelek.

Veliko uspeha!

1. Dokazite, da za vsako naravno število  $n$  velja: (10 točk)

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1.$$

2. Dokazite, da je število  $\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{2}}$  iracionalno. (8 točk)

3. Dana je množica

$$\mathcal{A} = \left\{ \frac{2m+1}{|m|} : m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

Ali je množica  $\mathcal{A}$  omejena? Če je, potem ji poišči supremum in infimum. Ali obstajata tudi maksimum oziroma minimum množice  $\mathcal{A}$ ? (10 točk)

4. Poiščite vsa kompleksna števila  $z$ , ki rešijo enačbo  $z^3 = (-1 + i\sqrt{3})^{100}$ . Zapišite jih v polarni obliki. (8 točk)

5. Dano je zaporedje (7+7=14 točk)

$$a_n = \frac{n}{3^n - n}.$$

- (a) Dokazite, da je zaporedje  $a_n$  padajoče in omejeno.  
(b) Določite limto zaporedja. Nato za število  $\varepsilon = 0.01$  poiščite najmanjše naravno število  $n_0$  z lastnostjo, da za vsak  $n \geq n_0$  člen  $a_n$  leži v  $\varepsilon$ -okolici limite.