

Osnove matematične analize

2. kolokvij + 1. izpit

17. januar 2023

Odgovori naj bodo primerno utemeljeni. Veliko uspeha!

1. [5 + 5] Utemeljite, zakaj vrsti konvergirata in določite njuni vsoti:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{2^{2n}}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}.$$

Nasvet: Pri drugi vrsti lahko uganete n -to delno vsoto in jo potrdite z indukcijo, ali pa uporabite parcialne ulomke.

2. [6] Obravnajte pogojno in absolutno konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{n^2+1}.$$

3. Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} a + e^{-x} \sin(x), & x > 2 \\ b, & x = 2 \\ x^3 + 2x - 1, & x < 2 \end{cases},$$

kjer sta a in b realna parametra.

- (a) [4] Za katera a in b je funkcija f zvezna povsod, kjer je definirana?
- (b) [3] Določite $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- (c) [3] S tremi koraki bisekcije določite približek za ničlo na intervalu $[-2, 2]$.
4. (a) [4] Dokažite, da je za lihi funkciji $f(x), g(x)$ tudi njuna vsota $(f+g)(x)$ liha funkcija. Kaj pa njun kompozitum $(f \circ g)(x) = f(g(x))$?
- (b) [5] Dokažite, da je funkcija $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ liha, približno skicirajte njen graf in izpeljite izraz za inverzno funkcijo $\sinh^{-1}(x)$.
5. Naj bo f realna funkcija, definirana v neki okolici točke $a \in \mathbb{R}$ razen morda v a .
- (a) [2] Zapišite definicijo, kdaj velja $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.
- (b) [3] Navedite primer take funkcije in na skici njenega grafa označite vse v prejšnji definiciji uporabljene pojme.
6. (a) [2] Naj bo f realna funkcija, definirana v neki okolici točke $a \in \mathbb{R}$. Zapišite $\varepsilon - \delta$ definicijo zveznosti funkcije f v točki $a \in \mathbb{R}$.
- (b) [4] Z uporabo definicije zveznosti dokažite, da sta konstantna funkcija $f(x) = c$ in identična funkcija $g(x) = x$ zvezni v poljubni točki $a \in \mathbb{R}$.
- (c) [4] Z uporabo prejšnje točke in pravil za operacije z zveznimi funkcijami utemeljite zveznost polinomskih in racionalnih funkcij.
7. (IZPIT) Dano je zaporedje

$$x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} \quad (n \text{ korenov}).$$

- (a) [3] Ugotovite, ali so vsi členi zaporedja iracionalna števila.
- (b) [4] Z indukcijo dokažite, da je $x_n = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.
- (c) [3] Ali je zaporedje x_n navzgor omejeno oziroma monotono? Kaj pa konvergentno?

Rešitev

1. (a) Iz zapisa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{-3} \cdot \left(\frac{-3}{2^2}\right)^n$ je razvidno, da je vrsta geometrijska s koeficientom $q = -3/4$. Ker je $|q| < 1$, je vrsta konvergentna z vsoto $S = \frac{a_1}{1-q} = \dots = 1/7$.
- (b) S pomočjo parcialnih ulomkov zapišemo $\frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right)$. Zato je n -ta delna vsota dane vrste enaka

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4n+1} \right). \end{aligned}$$

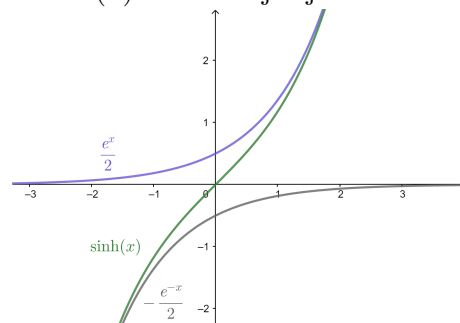
Ker obstaja limita $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4}$, je vrsta konvergentna z vsoto $S = \frac{1}{4}$.

Drugi način: Zapišemo nekaj delnih vsot: $S_1 = \frac{1}{5}$, $S_2 = \frac{2}{9}$, $S_3 = \frac{3}{13}$. Od tod uganemo, da je $S_n = \frac{n}{4n+1}$ in to ugotovitev preverimo z indukcijo. Sledi, da je vsota vrste enaka $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4}$.

2. Vrsta je alternirajoča, zato za pogojno konvergenco zadošča preveriti, da je zaporedje členov $a_n = \frac{2n+3}{n^2+1}$ padajoče in da ima limito 0. Kratek račun pokaže, da za vse n velja neenakost $a_n > a_{n+1}$, zato je zaporedje členov padajoče. Prav tako je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots = 0$.

Za absolutno konvergenco je potrebno preveriti (običajno) konvergenco vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2+1}$. Ker je $\frac{2n+3}{n^2+1} = \frac{2+3/n}{n+1/n}$, so členi za velike n približno $2/n$, torej je smiselno našo vrsto primerjati s harmonično. Zlahka vidimo, da je $\frac{2n+3}{n^2+1} > \frac{1}{n}$. Ker je harmonična vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentna, je po primerjalnem kriteriju divergentna tudi naša vrsta. Torej, začetna vrsta ni absolutno konvergentna.

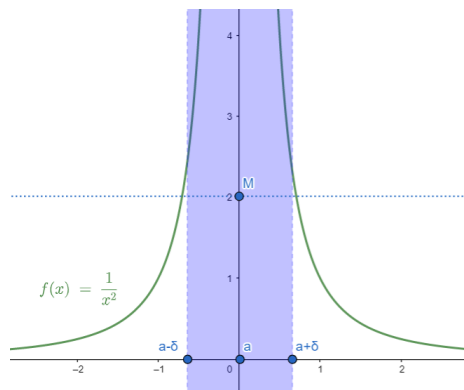
3. (a) Iz enakosti $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$ sledi $\lim_{x \rightarrow 2^-} x^3 + 2x - 1 = 11 = b$. Podobno iz enakosti $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$ sledi $a = 11 - e^{-2} \sin 2$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, saj je $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sin x = 0$ (princip sendviča: ker je $-1 \leq \sin x \leq 1$, sledi $-e^{-x} \leq e^{-x} \sin x \leq e^{-x}$, leva in desna funkcija pa gresta proti 0, ko gre $x \rightarrow \infty$).
- (c) Po treh korakih bisekcije dobimo približek 0.25, kar je še precej daleč točne vrednosti.
4. (a) Ker velja $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) + (-g(x)) = -(f+g)(x)$, je vsota funkcij liha. Podobno velja, da je kompozitum liha funkcija, saj je $(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x)) = -(f \circ g)(x)$.
- (b) Za lihost preverimo, da je $\sinh(-x) = \dots = -\sinh(x)$. Graf najlažje skiciramo tako, da



narišemo funkciji $\frac{e^x}{2}$ in $-\frac{e^{-x}}{2}$ in ju seštejemo.

(Iz grafa tudi razberemo, da je funkcija injektivna in surjektivna na \mathbb{R} .) Za inverzno funkcijo zapišemo $x = \sinh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ in izrazimo y iz dobljene enačbe. To naredimo tako, da enačbo pomnožimo z $2e^y$, da dobimo $2xe^y = e^{2y} - 1$. Z vpeljavo substitucije $t = e^y$ dobimo kvadratno enačbo $0 = t^2 - 2xt - 1$ z rešitvama $t_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$. Ker je $t > 0$, je smiselna rešitev le $t = x + \sqrt{x^2 + 1}$. Tako dobimo $e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ in zato $y = \ln e^y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

5. (a) $\infty = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, če za vsak $M \in \mathbb{R}$ obstaja število $\delta > 0$, da za vsak x iz $|x - a| < \delta$ sledi $f(x) > M$.



(b)

Za funkcijo $f(x) = \frac{1}{x^2}$ velja $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$. To pomeni, da lahko za vsako število $M \in \mathbb{R}$ izberemo dovolj majhen $\delta > 0$, da v δ -okolici točke $a = 0$ (modri pas) vrednosti funkcije f presegajo vrednost M , torej ustrezni del grafa funkcije leži nad premico $y = M$.

- (a) Funkcija f je zvezna v točki $a \in D_f$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsak x iz $|x - a| < \delta$ sledi $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
- (b) Konstantna funkcija $f(x) = c$ je zvezna v poljubni točki a , saj lahko za vsak $\varepsilon > 0$ izberemo $\delta = 1$ (ali celo katerikoli $\delta > 0$), pa iz $|x - a| < \delta$ sledi $|f(x) - f(a)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.
 Identična funkcija $g(x) = x$ je prav tako zvezna v poljubni točki a , saj lahko za vsak $\varepsilon > 0$ izberemo $\delta = \varepsilon > 0$, pa iz $|x - a| < \delta$ sledi $|f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon$.
- (c) Če sta funkciji f, g zvezni v neki točki $a \in \mathbb{R}$, potem sta v tej točki zvezni tudi produkt $f \cdot g$ in vsota $f + g$. Zato iz zveznosti identične funkcije $g(x) = x$ sledi tudi zveznost potence $h(x) = x^k = g(x) \cdot \dots \cdot g(x)$, zaradi zveznosti konstantne funkcije pa še zveznost funkcije $h(x) = a_k x^k$ (kjer je a_k konstanta). Vsaka polinomska funkcija $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ je vsota členov oblike $a_k x^k$, ki so zvezne funkcije, in torej zvezna (v vsaki točki iz \mathbb{R}).
6. (a) Indukcija. $x_1 = \sqrt{2}$ je iracionalno število. Za indukcijski korak privzemimo, da je x_n iracionalno število. Recimo, da $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ ni iracionalno. Potem je $x_{n+1} = \frac{a}{b}$ za neki tuji si celi števili a, b . Sledi $\frac{a^2}{b^2} - 2 = x_n$, torej je x_n racionalno, protislovje. Zato je tudi x_{n+1} iracionalno. Po indukciji sklepamo, da so vsi členi iracionalna števila.
- (b) Trditev velja za $n = 1$, saj je $x_1 = \sqrt{2} = 2 \cos(\frac{\pi}{4})$. Za indukcijski korak privzemimo, da je $x_n = 2 \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$. Po formuli za kosinus dvojnega kota sledi

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sqrt{2 + x_n} = \sqrt{2 + 2 \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})} = \sqrt{2 + 2 \cos(2 \frac{\pi}{2^{n+2}})} = \\ &= \sqrt{2 + 4 \cos^2(\frac{\pi}{2^{n+2}}) - 2} = 2 \cos(\frac{\pi}{2^{n+2}}). \end{aligned}$$

- (c) Iz prejšnje točke sledi, da je zaporedje x_n navzgor omejeno z 2 in naraščajoče, saj zaporedje $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ pada od $\pi/4$ proti 0, torej kosinus tega izraza narašča proti 1. Velja $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2 \cos(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2^{n+1}}) = 2 \cos 0 = 2$.

Vse ugotovitve je mogoče dokazati tudi direktno brez sklicevanja na rezultat iz točke (b).