

Osnove matematične analize

Pisni izpit

31. januar 2024

1. Fibonaccijevo zaporedje F_n je definirano z začetnima členoma $F_1 = F_2 = 1$ in z rekurzivno formulo $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ za $n \geq 3$. Dokažite, da enakost

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}.$$

velja za vsa naravna števila $n \in \mathbb{N}$. (6t)

2. Določite vsa kompleksna števila z lastnostjo $z^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{2024}$. (6t)

3. (a) Določite vsoto vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$. (5t)

- (b) Ugotovite, ali je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{3^n - n}$ konvergentna. (5t)

4. Dana je funkcija $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$.

(a) Določite definicijsko območje za $f(x)$. (1t)

(b) Dokažite, da je $f(x)$ liha in injektivna. (3t)

(c) Določite limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ in $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. (4t)

(d) Izpeljite izraz za inverzno funkcijo $f^{-1}(x)$. (2t)

5. Dokončajte začeto definicijo. Nato navedite konkreten primer objekta iz definicije.

(a) Realna funkcija $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ je definirana v okolici točke $a \in D \subseteq \mathbb{R}$, razen morda v a . Število $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, če... (2t)

(b) Za množico $A \subseteq \mathbb{R}$ velja $a = \sup A$, če... (2t)

(c) Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je pogojno konvergentna, če... (2t)

(d) Zaporedje ima limito $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, če... (2t)

6. Zveznost.

(a) Zapišite in dokažite izrek o obstoju ničle funkcije $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, ki je zvezna na zaprtem intervalu. (6t)

(b) Naštejte še 3 lastnosti funkcije, ki je zvezna na zaprtem intervalu, in jih pojasnite na primeru funkcije $\sin(x)$. (4t)

Rešitev

1. Za $n = 1$ dobimo $F_1^2 = F_1 F_2$, torej $1 = 1$. Recimo, da enakost velja za neki $n \in \mathbb{N}$. Potem za $n + 1$ sledi

$$\begin{aligned} F_1^2 + \dots + F_n^2 + F_{n+1}^2 &\stackrel{I.P.}{=} F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 \\ &= (F_n + F_{n+1}) F_{n+1} \\ &= F_{n+1} F_{n+2}. \end{aligned}$$

2. Desna stran enaka 1 (bodisi pretvorimo v polarni zapis in uporabimo de Moivrejevo formulo, bodisi z zaporednim kvadriranjem). Potem rešimo enačbo $z^3 = 1$, ki ima tri rešitve. V polarnem zapisu dobimo $z_k = \cos \frac{2\pi k}{3} + i \sin \frac{2\pi k}{3}$ za $z = 0, 1, 2$, kar zlahka pretvorimo v kartezični zapis $z_0 = 1$, $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. (a) Z metodo parcialnih ulomkov zapišemo $\frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1/4}{4n-3} + \frac{-1/4}{4n+1}$. Za delno vsoto dobimo

$$S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \dots - \frac{1}{4k+1} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4(4k+1)},$$

kar konvergira proti $1/4$, ko gre $k \rightarrow \infty$.

- (b) Izračunamo $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \dots = 1/3$, torej vrsta konvergira.

4. (a) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

- (b) Hitro vidimo, da je $f(-x) = \dots = -f(x)$, torej je funkcija liha. Iz $f(x) = f(x')$ po preurejanju in kraššanju sledi $x = x'$, torej je funkcija injektivna.

- (c) Vemo, da je $e^{2x} > 0$ za vse $x \in \mathbb{R}$. Sledi:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{0+1}{0-1} = -1 \text{ (saj gre } e^{2x} \text{ proti } 0),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+1/e^{2x}}{1-1/e^{2x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1 \text{ (saj gre } e^{2x} \text{ proti } \infty),$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ (saj gre e^{2x} proti 1 iz leve, zato je imenovalec negativen), in

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ (saj gre e^{2x} proti 1 iz desne, zato je imenovalec pozitiven).

- (d) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$.

Opomba: Funkcija $f(x)$ iz naloge se imenuje hiperbolični kotangens, $f(x) = \coth x$.

5. Glej zapiske predavanj ali standardno literaturo.

6. (a) Iz predavanj poznamo naslednje lastnosti. Če je $f(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna, potem:

i. je (navzgor in navzdol) omejena na $[a, b]$.

ii. zavzame minimum in maksimum na $[a, b]$, torej, $\exists x_{min} \in [a, b]$, da je $f(x_{min}) = m \leq f(x)$ za vse $x \in [a, b]$, in $\exists x_{max} \in [a, b]$, da je $f(x_{max}) = M \geq f(x)$ za vse $x \in [a, b]$.

iii. zavzame vse vrednosti med minimumom in maksimumom, torej, za vse $y \in [m, M]$ obstaja $x \in [a, b]$, da je $f(x) = y$.

iv. če je f v krajišjih intervala različno predznačena, v notranjosti zavzame tudi ničlo (bisekcija). Torej, iz $f(x)f(b) < 0$ sledi, da obstaja $x \in (a, b)$, da je $f(x) = 0$.

v. f je tudi enakomerno zvezna. To pomeni, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vse $x, y \in [a, b]$ iz pogoja $|x - y| < \delta$ sledi $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

- (b) Funkcija $\sin(x)$ je zvezna na zaprtem intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$. Tam je tudi omejena in zavzame minimum $m = -1$ v točki $x_{min} = -\pi/2$, maksimum $M = 1$ v točki $x_{max} = \pi/2$ ter vse vrednosti vmes, tudi ničlo v točki $x_0 = 0$.