

# Osnove matematične analize

1. kolokvij

22. november 2023

1. Dokažite, da je izraz  $4^n + 9^{n+1}$  deljiv s 5 za vsako naravno število  $n$ . (10 točk)

2. Dokažite, da je število  $\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}$  iracionalno. (8 točk)

3. (a) Zapišite definicijo supremuma množice. (4 točk)

(b) Dana je množica

$$\mathcal{A} = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dokažite, da je množica  $\mathcal{A}$  omejena in ji poiščite supremum in infimum. Ali obstajata tudi maksimum oziroma minimum množice  $\mathcal{A}$ ? (6 točk)

4. Poiščite vsa kompleksna števila  $z$ , ki rešijo enačbo  $|z|z^3 = 1 - i$ . Zapišite jih v polarni obliki. (10 točk)

5. Dano je zaporedje (6+6=14 točk)

$$a_n = \sqrt{\frac{2^n + 1}{2^n - 1}}.$$

(a) Dokažite, da je zaporedje  $a_n$  padajoče in omejeno.

(b) Določite limito zaporedja. Nato za število  $\varepsilon = 0.1$  poiščite najmanjše naravno število  $n_0$  z lastnostjo, da za vsak  $n \geq n_0$  člen  $a_n$  leži v  $\varepsilon$ -okolici limite.

Vsi odgovori morajo biti primerno utemeljeni. Oddajte urejen izdelek.

Veliko uspeha!