

Osnove matematične analize

2. kolokvij
17. januar 2024

1. Obravnavajte (pogojno in absolutno) konvergenco danih vrst.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!} \quad (2t)$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{2n+5} \right)^{2n} \quad (2t)$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+2}{n^2+1} \quad (4t)$$

2. Določite definicijsko območje funkcije f , ki je podana s predpisom

$$f(x) = \frac{1 + 2 \ln x}{2 - 3 \ln x}.$$

Ali je funkcija f injektivna? Če je, poiščite še njeno inverzno funkcijo. (6t)

3. Določite realna parametra a in b tako, da bo funkcija f zvezna povsod, kjer je definirana:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x \tan(5x)}{\sin^2(3x)}, & -\frac{\pi}{3} < x < 0 \\ \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 1} + a, & 0 \leq x \leq 1 \\ b \arctan\left(\frac{2}{(1-x)^2}\right), & 1 < x \end{cases} \quad (6t)$$

4. Bisekcija.

(a) Natančno zapišite izrek o obstoju ničle zvezne funkcije in ga dokažite. (5t)

(b) Z bisekcijo določite približek za $\sqrt{3}$, ki od točne vrednosti odstopa za manj kot $\frac{1}{10}$. (3t)

5. Dokončajte začeto definicijo. Nato navedite konkreten primer objekta iz definicije.

(a) Naj bo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ realno zaporedje in $A \in \mathbb{R}$ realno število.
 $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, če... (2t)

(b) Realna funkcija $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ je definirana v okolici točke $a \in \mathbb{R}$, razen morda v a .
 $\infty = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, če... (2t)

(c) Realna funkcija $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ je definirana v okolici točke $a \in \mathbb{R}$.
Funkcija f je zvezna v a , če... (2t)

6. Geometrijska vrsta.

(a) Zapišite izrek o konvergenci in vsoti geometrijske vrste in ga dokažite. (4t)

(b) Navedite primer geometrijske vrste z vsoto 2024. (2t)

Rešitev

- Konvergira (kvocientni kriterij), tudi absolutno.
 - Divergira (korenski kriterij).
 - Pogojno konvergira (Leibnizov kriterij), absolutno ne (primerjava s harmonično vrsto).
- $D_f = (0, \infty) - \{e^{2/3}\}$. Funkcija je injektivna (preverimo, da iz $f(x) = f(x')$ sledi $x = x'$). Predpis za inverz je $f^{-1}(x) = e^{\frac{2x-1}{3x+2}}$.
- Da bo f zvezna v 0, mora veljati $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$. Od tod sledi $20/9 = a - 3$ oziroma $a = 47/9$. Da bo f zvezna v 1, mora veljati $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. Od tod sledi $a = b \cdot \frac{\pi}{2}$ oziroma $b = \frac{94}{9\pi}$. Ker je f kot kompozitum zveznih funkcij zvezna tudi povsod v notranjosti intervalov $(-\pi/3, 0)$, $(0, 1)$ in $(1, \infty)$, je za takšna a, b zvezna povsod, kjer je definirana.
- Izrek: Če je realna funkcija $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna in velja $f(a)f(b) < 0$, potem obstaja $c \in (a, b)$, da je $f(c) = 0$. Dokaz: glej zapiske predavanj.
 - Z bisekcijo iščemo pozitivno ničlo funkcije $f(x) = x^2 - 3$:
 - Velja $f(1) < 0$ in $f(2) > 0$, zato vsaj ena ničla leži na intervalu $(1, 2)$.
 - Ker je $f(1.5) < 0$, ničla leži na intervalu $(1.5, 2)$.
 - Ker je $f(1.75) > 0$, ničla leži na intervalu $(1.5, 1.75)$.
 - Ker je $f(1.675) < 0$, ničla leži na intervalu $(1.675, 1.75)$. Ta interval je krajši od $1/10$, torej lahko za iskani približek vzamemo katerokoli njegovo točko.
- Naj bo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ realno zaporedje in $A \in \mathbb{R}$ realno število.
 $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za vsak $n \geq n_0$ velja $|a_n - A| < \varepsilon$.
Konkreten primer: $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$.
 - Realna funkcija $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ je definirana v okolici točke $a \in \mathbb{R}$, razen morda v a .
 $\infty = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, če za vsak $M \in \mathbb{R}$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ iz pogoja $0 < |x - a| < \delta$ sledi $f(x) \geq M$.
Konkreten primer: $\infty = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$.
 - Realna funkcija $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ je definirana v okolici točke $a \in \mathbb{R}$.
Funkcija f je zvezna v a , če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ iz pogoja $|x - a| < \delta$ sledi $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
Konkreten primer: funkcija $f(x) = x$ je zvezna v točki $a = 0$.
- Izrek: Geometrijska vrsta $a_0 + a_0q + a_0q^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{q^n}$, kjer je $a_0 \neq 0$, je konvergentna natanko tedaj, ko je $|q| < 1$. Tedaj je njena vsota enaka $S = \frac{a_0}{1-q}$. Dokaz: glej zapiske predavanj.
 - Velja na primer $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2$, zato je $1012 + \frac{1012}{2} + \frac{1012}{4} + \dots = 2024$. Možne so tudi druge rešitve. Če nastavimo $2024 = \frac{a_0}{1-q}$, lahko za poljubno izbran a_0 določimo q in obratno. Za $a_0 = 1$ dobimo $q = \frac{2023}{2024}$.