OMA, 1. izpit, 29. jan. 2025

① $2|z|^2 - z^2 = 2i \cdot \bar{z} + 8$ $\boxed{10}$

$2(a^2+b^2) - (a^2 + 2abi - b^2) = 2i(a - bi) + 8$

$a^2 + 3b^2 - 2abi = 2ia + 2b + 8$

$\text{Re}: a^2 + 3b^2 = 2b + 8 \quad (1)$

$\text{Im}: -2ab = 2a \quad (2)$

$(2)\ 2a(1+b) = 0 \Rightarrow a = 0$ ali $b = -1$.

① $a = 0$: $3b^2 - 2b - 8 = 0$

$b_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+96}}{6} = \dfrac{2 \pm 10}{6}$

$b_1 = 2,\ b_2 = -4/3$

② $b = -1$: $a^2 + 3 = -2 + 8$

$a^2 = 3$

$a_{1,2} = \pm\sqrt{3}$

$z_1 = 2i,\ z_2 = -\frac{4}{3}i,\ z_3 = \sqrt{3} - i,\ z_4 = -\sqrt{3} - i.$

b) $z^4 = \sqrt{3} + i$ $\boxed{10}$

Polarna oblika: $|\sqrt{3}+i| = \sqrt{3+1} = 2$, $\arg(\sqrt{3}+i) = \pi/6$

$z^4 = 2(\cos\pi/6 + i \cdot \sin\pi/6)$

$z_k = \sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{\pi/6 + 2k\pi}{4} + i \sin\dfrac{\pi/6 + 2k\pi}{4}\right)$ za $k = 0, 1, 2$ in 3.

$z_1 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{\pi}{24} + i\cos\frac{\pi}{24})$

$z_2 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{13\pi}{24} + i\sin\frac{13\pi}{24})$

$z_3 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{25\pi}{24} + i \cdot \sin\frac{25\pi}{24})$

$z_4 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{37\pi}{24} + i \cdot \sin\frac{37\pi}{24})$

② a) $a_n = \frac{3n-1}{n+1} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ $\boxed{10}$

Stekališča

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n \text{ sodo} \\ 1, & n = 4k+1, \quad k \in \mathbb{Z} \\ -1, & n = 4k+3, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{n+1} = 3$$

Torej so stekališča $0, 3$ in -3.

Podzaporedje $a_{2k} = \frac{3 \cdot 2k - 1}{2k+1}$ konv. proti 0,

$a_{4k+1} = \frac{3(4k+1)-1}{4k+1+1}$ konv. proti 3

$a_{4k+3} = \frac{3(4k+3)-1}{4k+3+1}$ konv. proti -3.

b) $b_n = \frac{2+b_{n-1}}{b_{n-1}}$, $b_1 = 1$ $\boxed{10}$

i. Prvih pet členov: $b_1 = 1$, $b_2 = 3$, $b_3 = \frac{5}{3}$, $b_4 = \frac{11}{5}$, $b_5 = \frac{21}{11}$

Zaporedje ni monotono ($b_1 < b_2$ in $b_2 > b_3$).

ii. Zaporedje b_n je pozitivno (T_n).

Indukcija:

T_1: $b_1 > 0$, res.

T_n (i.p.): $b_n > 0$.

$T_n \Rightarrow T_{n+1}$ (i.k.): $b_{n+1} = \frac{2+b_n}{b_n} > 0$ $/ \cdot b_n$ (i.p.)

$2 + b_n > 0$

$b_n > -2$ kar je res po i.p.

Zaporedje je navzgor omejeno s 3

Dokaz $b_n \leq 3$ (T_n) z indukcijo.

T_1: $b_1 = 1 \leq 3$, res.

T_n (i.p.): $b_n \leq 3$.

$T_n \Rightarrow T_{n+1}$ (i.k.): $b_{n+1} = \frac{2+b_n}{b_n} \leq 3$ $/ \cdot b_n$ ($b_n > 0$)

$2 + b_n \leq 3b_n$

$b_n \geq 1$.

Z indukcijo pokažimo $b_n \geq 1$ (T_n').

T_1': $b_1 = 1 \geq 1$, res.

T_n' (i.p.): $b_n \geq 1$

$T_n' \Rightarrow T_{n+1}'$ (i.k.): $b_{n+1} = \frac{2+b_n}{b_n} \geq 1$ $/ \cdot b_n$

$2 + b_n \geq b_n$

$2 \geq 0$, res.

iii. Prvo moramo dokazati obstoj limite.

Opazimo, da podzaporedje b_{2k} pada proti 2,

kar dokažemo z dvema indukcijama: $b_{2k} > b_{2k+2}$ in $b_{2k} > 2$.

Opazimo tudi, da podzaporedje b_{2k+1} narašča proti 2,

kar dokažemo z dvema indukcijama: $b_{2k+1} < b_{2k+3}$ in $b_{2k+1} < 2$.

Točke se je upoštevalo, če je bila izračunana le limita:

$\lim b_n = \frac{2 + \lim b_{n-1}}{\lim b_{n-1}}$, $\lim b_n = \lim b_{n-1} = L$.

$L = \frac{2+L}{L}$ $/ \cdot L$

$L^2 - L - 2 = 0$

$(L-2)(L+1) = 0$

$L_1 = 2$, $\cancel{L_2 = -1}$

Torej $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$.

③ a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$ $\boxed{6}$

Vrsta konvergira celo absolutno, kar lahko preverimo s primerjalnim kriterijem:

$\left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, za potenčno vrsto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ pa vemo, da konvergira.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!\, n^5}{n!\, 5^n}$ $\boxed{8}$

Konvergenco vrste preverimo s kvocientnim kriterijem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{(n+2)}{\cancel{(n+2)!}}\,(n+1)^5 \cdot \cancel{n!}\ \cancel{5^n}}{\cancel{(n+1)!}\ \underset{5}{\cancel{5^{n+1}}} \cdot \overset{(n+1)}{\cancel{(n+1)!}}\, n^5}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\cdot(n+1)^5}{5\cdot(n+1)\,n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^6(1+\frac{2}{n})\cdot(1+1/n^5)}{5(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{5} < 1.$$

Torej vrsta konvergira.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+n-1}{2n^2+8}\right)^n$ $\boxed{6}$

Konvergenco vrste preverimo s korenskim kriterijem.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n-1}{2n^2+8} = \frac{3}{2} > 1.$$

Torej vrsta divergira.

(4)

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin(3x)}{x} & \text{če } x<0, \\ ax+b & \text{če } 0\le x\le 1, \\ \dfrac{x+9x+10}{x-1} & \text{če } x>1 \end{cases}$$

$\boxed{20}$

Dobičimo a in b, da bo f zvezna.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (ax+b) = b$$

Iz česar dobimo $\underline{b=3.}$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (ax+b) = a+b$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+9x-10}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\cancel{(x-1)}(x+10)}{\cancel{(x-1)}} = 11.$$

Veljati more $a+b=11 \Rightarrow a+3=11 \Rightarrow \underline{a=8.}$

(5) $f(x)=e^{\frac{x}{x+1}}$.

$\boxed{5}$ a) Definicijsko območje: $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Zaloga vrednosti: iz grafa racion. funkc. $g(x)=\frac{x}{x+1}$ vidimo $Z_g=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Torej $e^{g(x)}$ doseže vse pozitivne vrednosti, razen e^1:

$Z_f=\mathbb{R}^+\setminus\{e\}=(0,e)\cup(e,\infty)$.

$\boxed{5}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{x}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}}=e$.

$\boxed{10}$ c) Funkcija $x\mapsto\frac{x}{x+1}$ je injektivna in eksponentna funkcija je prav tako injektivna, torej je kompozitum tudi injektivna.

Inverz:

$x=e^{\frac{y}{y+1}}$

$\ln x=\frac{y}{y+1} \quad /\cdot(y+1) \quad , y\neq -1$

$(y+1)\ln x=y$

$y(\ln x-1)=-\ln x \quad /:\ln x-1 \quad , x\neq e$

$y=-\frac{\ln x}{\ln x-1}$

$f^{-1}(x)=\frac{\ln x}{1-\ln x}$.