

Osnove matematične analize

1. izpit

29. januar 2025

1. (20 točk) Poiščite vsa kompleksna števila, ki rešijo dano enačbo.

(a) $2|z|^2 - z^2 = 2i\bar{z} + 8$.

(b) $z^4 = \sqrt{3} + i$.

2. (20 točk) Analizirajte spodnji zaporedji.

(a) Dano je zaporedje $a_n = \frac{3n-1}{n+1} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

i. Poiščite vsa stekališča zaporedja a_n in za vsako stekališče poiščite kakšno konvergentno podzaporedje, ki k temu stekališču konvergira.

ii. Poiščite natančno spodnjo in natančno zgornjo mejo zaporedja a_n .

(b) Dano je zaporedje z rekurzivno zvezo $b_n = \frac{2+b_{n-1}}{b_{n-1}}$, $b_1 = 1$.

i. Izračunajte prvih pet členov zaporedja b_n . Ali je zaporedje monotono?

ii. Utemeljite, da je zaporedje b_n pozitivno in s pomočjo indukcije pokažite, da je zaporedje spodaj omejeno z 1, zgoraj pa s 3.

iii. Izračunajte limito zaporedja b_n .

3. (20 točk) S pomočjo znanih konvergenčnih testov raziščite konvergenco spodnjih vrst.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)! \cdot n^5}{n! \cdot 5^n}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + n - 1}{2n^2 + 8}\right)^n$.

4. (20 točk) Dana je funkcija s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)}{x} & \text{če } x < 0, \\ ax + b & \text{če } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{x^2 + 9x - 10}{x - 1} & \text{če } x > 1. \end{cases}$$

Določite parametra a in b , da bo funkcija zvezna.

5. (20 točk) Dana je funkcija s predpisom $f(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$.

(a) Izračunajte definicijsko območje \mathcal{D}_f in zalogo vrednosti \mathcal{Z}_f funkcije f .

(b) Izračunajte limito $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

(c) Utemeljite, da je funkcija injektivna in izračunajte inverz funkcije $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathcal{Z}_f$.

Vsi odgovori morajo biti primerno utemeljeni. Oddajte urejen izdelek.

Veliko uspeha!