

Osnove matematične analize

2. izpit

12. januar 2025

1. (15 točk) Z indukcijo dokažite, da za vsako naravno število $n \geq 2$ velja enakost

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

2. (15 točk) Poiščita vsa kompleksna števila z , ki rešijo enačbo

$$z^7 + z^5 - 32z^2 - 32 = 0.$$

3. (20 točk) Dano je zaporedje

$$a_n = \frac{2^n - 1}{2^n + n}.$$

(a) Dokažite, da je zaporedje naraščajoče.

(b) Ali je zaporedje konvergentno? V kolikor je, mu določite natančno spodnjo in natančno zgornjo mejo. Odgovor utemeljite.

4. (15 točk) S pomočjo znanih konvergenčnih testov raziščite konvergenco spodnjih vrst.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3n)!}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}$

5. (15 točk) Izračunajte spodnje limite.

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2) - 1}{x^4}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 10x + 1} - x)$

6. (20 točk) Dana je funkcija s predpisom

$$f(x) = e^{\frac{x}{x+1}}.$$

(a) Zapišite definicijsko območje \mathcal{D}_f in zalogo vrednosti \mathcal{Z}_f funkcije f .

(b) Dokažite, da je funkcija f injektivna.

(c) Zapišite inverzno funkcijo $f^{-1}(x)$.

Vsi odgovori morajo biti primerno utemeljeni. Oddajte urejen izdelek.

Veliko uspeha!