

# Osnove matematične analize

3. izpit

4. september 2025

1. (20 točk) Poiščite vsa kompleksna števila  $z$ , ki rešijo enačbo

$$z^6 + 8z^3 + 16 = 0.$$

2. (24 točk) Analizirajte spodnji zaporedji.

(a) Dano je zaporedje  $a_n = (-1)^n + \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n}$ .

- Poiščite vsa stekališča zaporedja  $a_n$  in za vsako stekališče poiščite kakšno konvergentno podzaporedje, ki k temu stekališču konvergira.
- Poiščite natančno spodnjo in natančno zgornjo mejo zaporedja  $a_n$ .

(b) Dano je zaporedje z rekurzivno zvezo  $b_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + \frac{3}{b_n})$ ,  $b_1 = 2$ .

- Dokažite, da je zaporedje konvergentno. (Namig: dovolj je pokazati, da je zaporedje spodaj omejeno z  $\sqrt{3}$  in strogo padajoče.)
- Izračunajte limito zaporedja  $b_n$ .

3. (18 točk) S pomočjo znanih konvergenčnih testov raziščite konvergenco spodnjih vrst.

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^{n^2}}{3^n}$

4. (18 točk) Izračunajte naslednje limite funkcij:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x \tan(3x)}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x)$

5. (20 točk) Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2, & x \leq 2, \\ \frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 4}{x - 2}, & x > 2. \end{cases}$$

- Določite parameter  $a$ , da bo funkcija zvezna.
- Za  $a = 1$  utemeljite, da je funkcija  $f$  injektivna in izračunajte njen inverz za primerno zožitev funkcije.

Vsi odgovori morajo biti primerno utemeljeni. Oddajte urejen izdelek.  
Veliko uspeha!