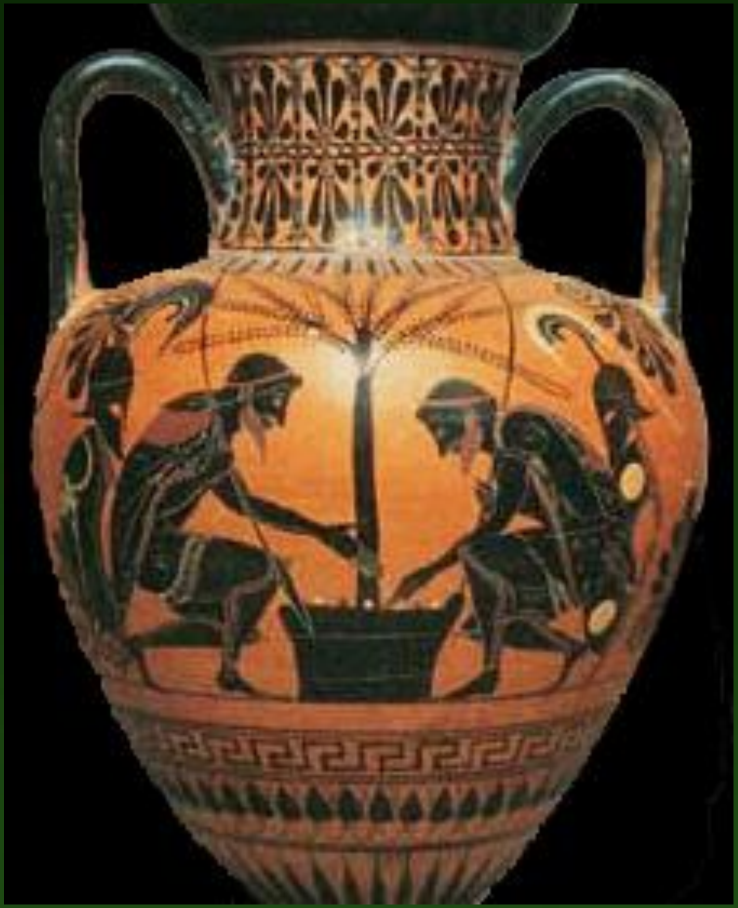
Kratka zgodovina verjetnostnega računa

dr. Boštjan Kuzman
Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Igre na srečo v antiki

- Žreb kot najbolj preprosta igra na srečo verjetno izhaja iz primitivnih religioznih obredov.
- V grški mitologiji si Zeus, Pozejdon in Hades z žrebom razdelijo nebo, morje in podzemlje.
- Različne oblike odločanja z žrebom se pojavljajo tudi v religioznih mitih drugih civilizacij.



Astragalus – predhodnik igralne kocke

- Koščica živalskega stopala po metu obleži v enem od 4 položajev (ovca, koza, konj, kamela)
- Dokazi kažejo na široko rabo med 3500 BC in 1600 AD.
- Najstarejši vir: slika iz egipčanske grobnice, na kateri plemič in njegova žena uporabljata astragali pri nekakšni igri na plošči.
- Zaradi asimetričnosti imata 2 položaja verjetnost vsak okoli 40%, preostala 2 vsak 10%.

- **Igra kotaljenja kosti** s štirimi astragaliji je bila priljubljena v antični Grčiji in Rimu.
  - Najboljši met je bil “Venera” (same različne vrednosti), najslabši “Pes” (sami psi, zelo majhna verjetnost).
  - Zaradi asimetrije astragalijev ni bilo mogoče razviti matematičnega razumevanja igre. Rezultate so pripisovali bogovom oziroma Usodi.

- **Igralna kocka** ali **tessera** se prav tako pojavi okoli 3500 BC, a je sprva manj razširjena.
  - Po grški mitologiji je Palamedes izumil igre s kockami za zabavo vojščakov med trojansko vojno.
  - V Svetem pismu rimski vojaki kockajo za Jezusova oblačila.
- Prve kocke niso bile nujno simetrične oziroma poštene. (slika: rimski kocki iz kosti iz okoli 100AD).

- Kljub visoko razviti matematiki ni videti, da bi antični Grki ali Rimljani razvili kakršnokoli razumevanje verjetnosti. Možne razlage:
  - nepraktičen zapis števil (množenje in deljenje zelo zahtevni)
  - manj prepoznavni vzorci zaradi asimetričnosti igralnih pripomočkov
  - ni potrebe za matematično razlago, ker gre za usodo oziroma voljo bogov

Srednjeveške igre in prepovedi

- **V srednjeveški Evropi** so bile različne igre s kockami in astragaliji zelo priljubljene. Cerkev in vladarji so jih skušali omejiti na različne načine.
  - Okoli 1190AD je bilo vitezom med angleškimi križarji dovoljeno zakockati največ 20 šilingov dnevno, vojščakom nižjega ranga pa je bilo kockanje prepovedano.

- Okoli 960AD je nadškof Wibold iz Cambraya izumil igro Ludus Clericalis. da bi osmislil sicer prepovedano kockanje menihov.
- Z metom treh kock je menih izbral eno izmed 56 vrlin, ki jo je moral nato 24 ur utrjevati.

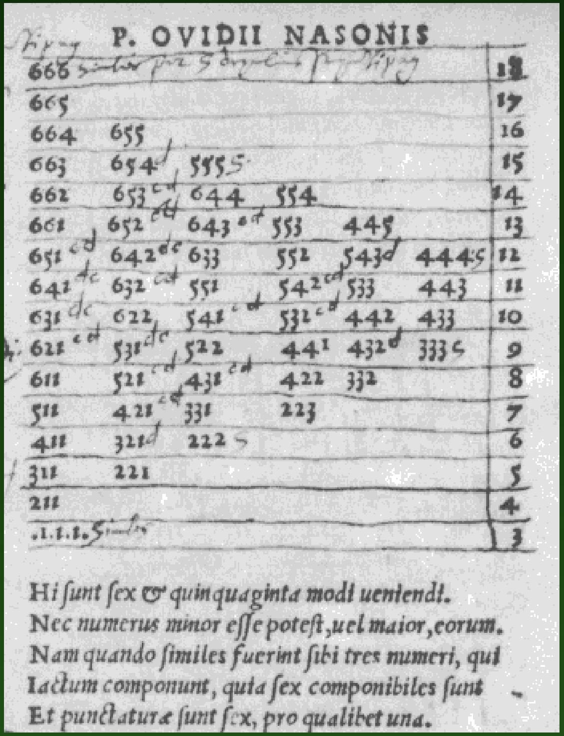
⚀⚀⚀	love	⚀⚂⚅	perseverance	⚁⚂⚄	hospitality	⚂⚃⚅	mortification
⚀⚀⚁	faith	⚀⚃⚃	kindness	⚁⚂⚅	economy	⚂⚄⚄	innocence
⚀⚀⚂	hope	⚀⚃⚄	modesty	⚁⚃⚃	patience	⚂⚄⚅	contrition
⚀⚀⚃	justice	⚀⚃⚅	resignation	⚁⚃⚄	zeal	⚂⚅⚅	confession
⚀⚀⚄	prudence	⚀⚄⚄	gentleness	⚁⚃⚅	poverty	⚃⚃⚃	maturity
⚀⚀⚅	temperance	⚀⚄⚅	generosity	⚁⚄⚄	softness	⚃⚃⚄	solicitude
⚀⚁⚁	courage	⚀⚅⚅	wisdom	⚁⚄⚅	virginity	⚃⚃⚅	constancy
⚀⚁⚂	peace	⚁⚁⚁	remorse	⚁⚅⚅	respect	⚃⚄⚄	intelligence
⚀⚁⚃	chastity	⚁⚁⚂	joy	⚂⚂⚂	piety	⚃⚄⚅	sighing
⚀⚁⚄	mercy	⚁⚁⚃	sobriety	⚂⚂⚃	indulgence	⚃⚅⚅	weeping
⚀⚁⚅	obedience	⚁⚁⚄	satisfaction	⚂⚂⚄	prayer	⚄⚄⚄	cheerfulness
⚀⚂⚂	fear	⚁⚁⚅	sweetness	⚂⚂⚅	affection	⚄⚄⚅	compassion
⚀⚂⚃	foresight	⚁⚂⚂	cleverness	⚂⚃⚃	judgment	⚄⚅⚅	self-control
⚀⚂⚄	discretion	⚁⚂⚃	simplicity	⚂⚃⚄	vigilance	⚅⚅⚅	humility

- Gre za prvo dokumentirano tabeliranje vseh možnih izidov naključnega eksperimenta.

- Latinsko elegično pesnitev **De Vetula** (okoli 1250AD) spremlja tabela s pravilno analizo možnih vsot pik pri metu treh kock.
- Avtor tabelira vseh 56 možnih izidov in opazi simetrijo med vsotami 3 in 18, 4 in 17, 5 in 16… Loči število zapisov glede na to, ali kocke ločimo (Cadentia) ali ne (Punctatura), razumevanje verjetnosti pa ni razvidno.

Vsota	*Cadentia*	*Punctatura*
3	*1* *(111)*	*1* *(111)*
4	*3* *(211,121,112)*	*1* *(211)*
5	*6* *(221,212,122,311,131,113)*	*2* *(221,311)*
…	…	…

- Met treh kock je tudi osnova pesmi **Chaunce of the Dyse** (okoli 1400 AD)


P. OVIDII NASONIS

666						18
665						17
664	655					16
663	654	555				15
662	653	644	554			14
661	652	643	553	445		13
651	642	633	552	543	444	12
641	632	551	542	533	443	11
631	622	541	532	442	433	10
621	531	522	441	432	333	9
611	521	431	422	332		8
511	421	331	223			7
411	321	222				6
311	221					5
211						4
.1.1.1.						3

Hi ſunt ſex & quinquaginta modi uenendi.
Nec numerus minor eſſe poteſt, uel maior, eorum.
Nam quando ſimiles fuerint ſibi tres numeri, qui
Iactum componunt, quia ſex componibiles ſunt
Et punctaturæ ſunt ſex, pro qualibet una.

Zgodnja renesansa: Pacioli in Cardano

- **Luca Pacioli** (1445-1509) je poučeval matematiko v Milanu in Firencah.
- Knjiga **Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalitá (1494)** je zajela vso znano matematiko tedanjega časa in se za dolgo časa uveljavila kot učbenik z vajami. Bila je prvo delo o algebri, napisano v ljudskem jeziku namesto latinščine.
- Sodeloval je tudi z Leonardom da Vincijem (knjiga De Divina Proportione).

- Paciolijeva **Naloga o pravični delitvi stav** velja za prvi zapisani problem iz verjetnosti:

  Osebi A in B igrata igro “Bala”. Vsak je stavil 10 zlatnikov. Kdor prvi zmaga 6 iger, pobere vseh 20 zlatnikov. Toda, pri 5 zmagah za A in 3 zmagah za B morata igro prekiniti. Kako naj si pravično razdelita vložek?

- Pacioli je v knjigi podal odgovor 5:3 v korist A.
- Tartaglia je leta 1556 ugovarjal, da je pravo razmerje 2:1.
- Peverone je leta 1558 utemeljil odgovor 6:1.
- Cardano v zapiskih iz leta 1560 trdi, da je razmerje 3:1.

- **Kaj je torej pravilen odgovor?**

- Paciolijev odgovor 5:3 ustreza razmerju med že doseženimi zmagami. Pomembno pa je razmerje med verjetnostmi za končno zmago A ali B!
  - Primerjaj: če bi se igra prekinila pri izidu 1:0, ali bi bilo smiselno, da ves denar dobi A?

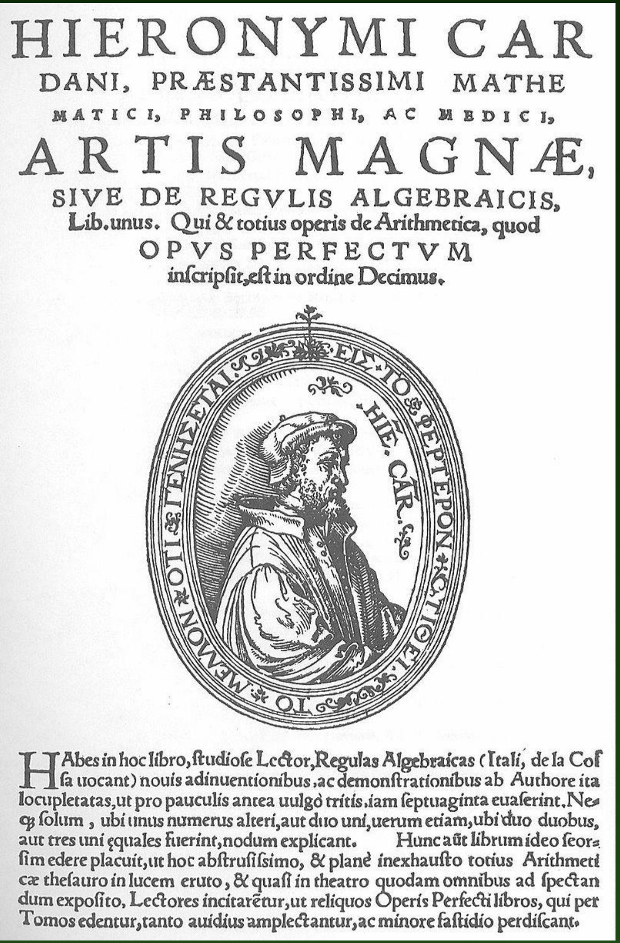
- Odgovora Tartaglia in Peveroneja sta prav tako napačna. Pravi odgovor je našel francoski matematik **Blaise Pascal** leta 1654, torej šele 160 let kasneje!

Rešitev Paciolijeve naloge:

- Če je verjetnost posamezne zmage ½ za vsakega igralca, potem pri izidu 5:3 za A, igralec A doseže 6 zmag na naslednje načine:
  - prvo naslednjo igro zmaga A (verjetnost ½)
  - prvo naslednjo igro zmaga B, drugo pa A (verjetnost ½ x ½ =1/4)
  - naslednji dve igri zmaga B, tretjo pa A (verjetnost ½ x ½ x ½ = 1/8)
- Verjetnost za končno zmago A je torej ½+1/3+1/8=7/8, za končno zmago B pa 1/8.

Poštena delitev vloženih stav je torej v razmerju 7:1 v korist A.

- **Gerolamo Cardano (1501-1576)**
- Italijanski matematik, zdravnik, astronom, astrolog, eden najvplivnejših mislecev renesanse, a precej problematična osebnost.
- Knjiga **Ars Magna** (Velika umetnost) o reševanju kubičnih enačb, 1545, velja za eno treh najpomembnejših del zgodnje renesanse.
- Mehanski izumi (kardanska gred, kombinacijska ključavnica – nekatere ideje ukradene…)
- Več kot 200 znanstvenih del, mnoga neobjavljena v rokopisih


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

Habes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neq; solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni ęquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarētur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

- Cardanov rokopis **Liber de Ludo Aleae** (Knjiga o igrah na srečo), napisan okoli 1564, je prvo delo o verjetnosti.
- Gre za mešanico dnevnika, priročnika za igranje iger in matematičnih trditev z veliko nejasnostmi in napakami, a tudi nekaj pravilnimi ugotovitvami:
  - Verjetnost, da se zgodi eden od dveh ločenih dogodkov je enaka vsoti verjetnosti: $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$, če je $A \cap B=\emptyset$.
  - Verjetnost, da se hkrati zgodita dva neodvisna dogodka je enaka produktu verjetnosti: $P(A \cap B)=P(A)P(B)$.
- Cardano je rokopis skrival. Odkrit je bil šele okoli leta 1660, ko so na novo teorijo verjetnosti že razvijali Pascal, Fermat in Huygens.

Pozna renesansa: Pascal in Fermat

- **Blaise Pascal** (1623-1662)
- Matematik, izumitelj, kršč. filozof
- Izjemen talent pokaže že v mladosti (računski stroji, geometrija, kombinatorika)
- Po nesreči s konjem se posveti predvsem teologiji (janzenizem)

- **Pierre de Fermat** (1607-1665)
- Odvetnik, ljubiteljski matematik, izjemna odkritja v geometriji, optiki, teoriji števil
- Večino odkritij si izmenjuje v pismih z znamenitimi matematiki in fiziki.

- **Medsebojno dopisovanje Fermata in Pascala** v letu 1654 postavi temelje teorije verjetnosti.

- V nizu pisem je Fermat postavil osnove teorije verjetnosti, Pascal pa je njegovo teorijo uporabil na konkretnih problemih, denimo Paciolijevem problemu pravične delitve stav, ki ga je tudi posplošil in pri tem razvil nova kombinatorična orodja (binomski koeficienti, Pascalov trikotnik)

- Pascal in Fermat verjetnosti ne razumeta kot število med 0 in 1, ampak govorita le o pričakovanih dobičkih pri igri.
- Po nesreči s konjem novembra 1654 se Pascal ni več ukvarjal z verjetnostjo. Nesrečo je razumel kot božje opozorilo.

- Vir nekaterih Pascalovih problemov v pismih je **Antoine Gombaud, Chevalier de Meré**, pisatelj in strasten kockar.

- De Meré je na primer menil, da sta naslednji stavi enakovredni:
  - V 4 metih kocke pade vsaj ena šestica.
  - V 24 metih dveh kock pade vsaj ena dvojna šestica.

  Vendar je pri prvi stavi zaslužil, pri drugi pa izgubljal. Zakaj?

- V 4 metih vsaj 1 šestica: 1-(5/6)^4=0,517.
- V 24 metih vsaj ena dvojna šestica: 1-(35/36)^24=0,491.

Prva stava je zanj ugodna, druga ne.

- Mladi nizozemec **Christiaan Huygens** je leta 1655 v Parizu slišal za rezultate Pascala in Fermata.
- Napisal je knjižico **De Rationiis in Alea Ludo** (Sklepanje pri igrah na srečo)**.**
- Ta je vsebovala 14 netrivialnih problemov z rešitvami in je bila še pol stoletja edino pravo znanstveno delo o verjetnosti.
- Huygeens (1629-1695) je kasneje postal vodilni evropski astronom tistega časa.

Huygeensov problem št. 14:
Osebi A in B izmenično mečeta po 2 kocki hkrati.
A zmaga, če vrže vsoto 6 prej kot B vrže vsoto 7.
Kakšna je verjetnost zmage A, če meče prvi?

Verjetnost vsote 6 v posameznem metu je 5/36, verjetnost vsote 7 pa 6/36, zato se zdi B v očitni prednosti.

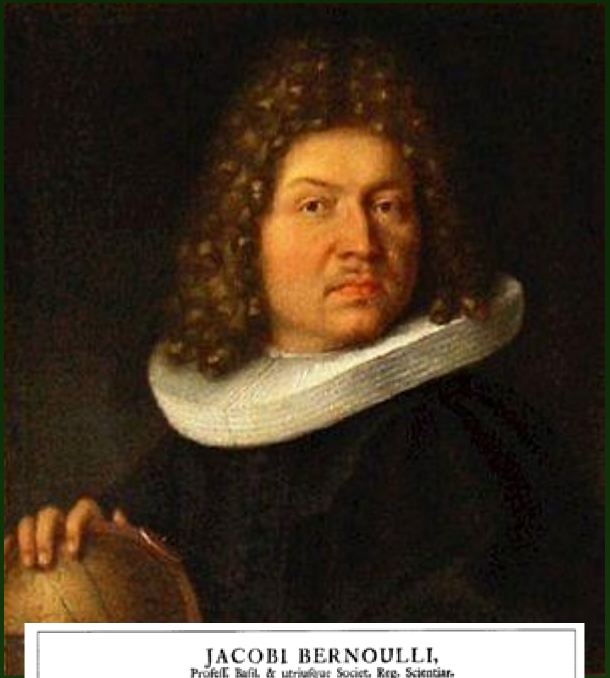
Toda, A meče prvi…

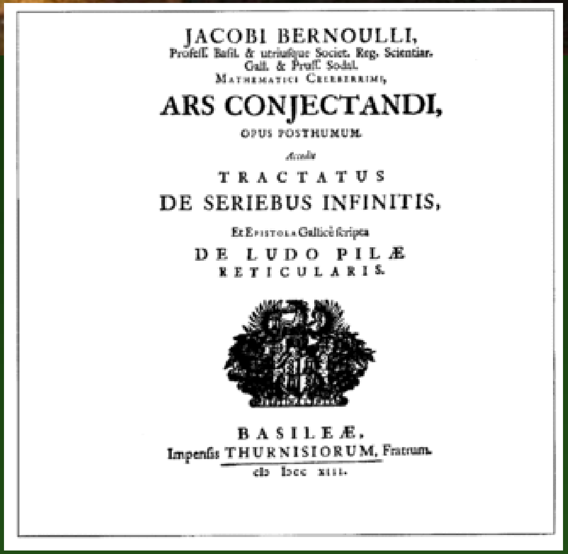
- Huygeens je v rešitvi zvito uporabil koncept pričakovanega dobička oziroma matematičnega upanja:
  - Če je a skupni vložek in x pričakovani dobiček od B, potem je $(a-x)$ pričakovani dobiček od A. Označimo z y še pričakovani dobiček od B v primeru, da B začne.
  - Ko je na vrsti A, bo takoj zmagal A z verjetnostjo 5/36, zato je pričakovani dobiček od B enak $x=31/36\ y$.
  - Ko je na vrsti B, pa bo takoj zmagal B z verjetnostjo 6/36, zato je pričakovani dobiček od B v tem primeru $y=1/6\ a + 5/6\ x$.
  - Iz sistema enačb sledi $x=31/61\ a$, zato je verjetnost zmage B enaka 31/61, verjetnost zmage A pa 30/61,
- Začetna poteza torej poveča verjetnost A za zmago, vseeno pa je B v rahli prednosti.

¸Jacob (James) Bernoulli (1654-1705)

- Ugledni akademik in profesor na univerz v Baslu navdihnjen s Huygeensovo knjigo vse do smrti piše knjigo **Ars Conjectandi**.
- Izid nedokončane knjige še 8 let zavira ljubosumni brat Johan (John) Bernoulli, prav tako pomemben matematik.
- Delo vsebuje veliko novih rezultatov, najpomembnejši med njimi je **Zakon velikih števil**, imenovan tudi Zlati izrek**.**

- Iz družine Bernoulli je izšlo še več matematikov: **Nicholas I, Nicholas II, Daniel, Johann II, Johann III, Jacob II.**





JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

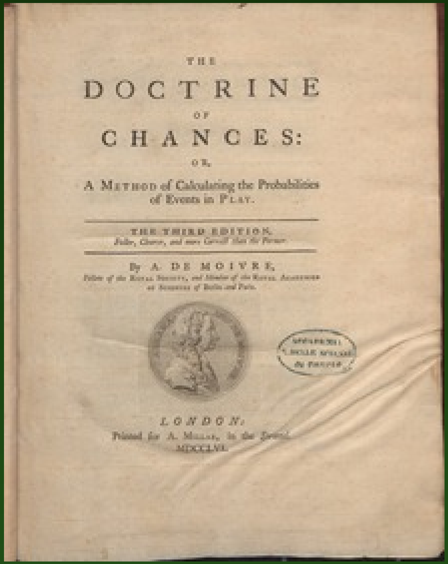
BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↄ Iↄcc xiii.

¸Medtem se v Angliji rojeva statistika…

- Zaradi epidemij kuge Kralj Henry VII leta 1538 zahteva sistematično beleženje podatkov o rojstvih in smrtih (načrtovanje vojske in pričakovanih davščin)
- John Graunt izumi različne metode za oceno števila prebivalcev Londona (1661)
- Zavarovanja za ladje na čezoceanskih plovbah (prvi zakon 1601 pod kraljico Elizabeto I, nastanek zavarovalnice Lloyds 1688)
- Hkrati z ladijskimi se pojavijo življenska zavarovanja. Astronom Edmund Halley razvije metodo za ocenjevanje verjetnosti preživetja in sestavi prve Tabele smrtnosti (1693).

Abraham de Moivre (1667-1754)

- Študira matematiko v Sedanu in Parizu, a kot hugenot zbeži iz Francije v Anglijo.
- Knjiga **Doctrine of Chances** (1718, dopolnjene izdaje 1738, 1756) prinese revolucionarna odkritja:
  - centralni limitni izrek (nedokazan)
  - razvoj v vrsto za normalno porazdelitev (aproksimacija binomske porazdelitve)
  - rešitve številnih netrivialnih problemov
  - povezave s statističnimi rezultati
- Kljub izjemnemu ugledu kot tujec ne more pridobiti akademskega statusa.



THE
DOCTRINE
OF
CHANCES:
OR,
A METHOD of Calculating the Probabilities of Events in PLAY.

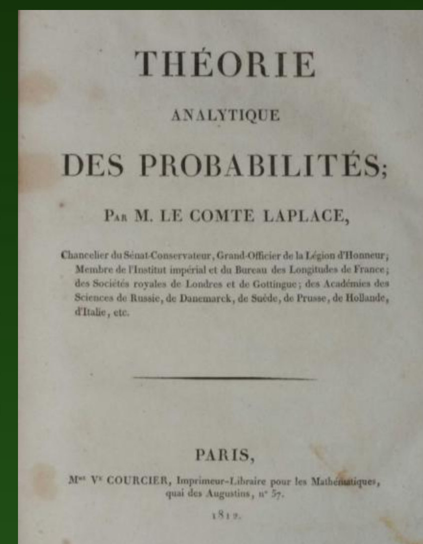
THE THIRD EDITION.

By A. DE MOIVRE,

LONDON:
MDCCLVI.

Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

- Eden najpomembnejših znanstvenikov vseh časov: astronomija, fizika, matematika, statistika.
- Knjiga **Théorie analytique des probabilités (1812)** zajame rezultate predhodnikov in izčrpa okvire modela verjetnosti Pascala in Fermata:
  - mojstrska uporaba orodij analize (integrali, vrste, rodovne funkcije) za posplošitve rezultatov in nove metode aproksimacij
  - zakon obratne verjetnosti (Bayesov zakon)
  - tesne povezave s statistiko zaradi neporsredne uporabe rezultatov pri astronomskih opazovanjih
- Nova filozofska razmišljanja o verjetnosti in determinizmu.


THÉORIE

ANALYTIQUE

DES PROBABILITÉS;

PAR M. LE COMTE LAPLACE,

Chancelier du Sénat-Conservateur, Grand-Officier de la Légion d'Honneur; Membre de l'Institut impérial et du Bureau des Longitudes de France; des Sociétés royales de Londres et de Gottingue; des Académies des Sciences de Russie, de Danemarck, de Suède, de Prusse, de Hollande, d'Italie, etc.

PARIS,

Mme Ve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1812.

Laplace je še vedno izhajal iz **Klasične definicije verjetnosti**, ki pravi, da je verjetnost dogodka enaka razmerju

$$\frac{\text{število ugodnih izidov}}{\text{število vseh izidov}}$$

Ta model je v osnovi prešibek, saj ne zajame situacij, ko je število vseh izidov neskončno, na primer:

- Met kovanca ponavljamo do prvega grba. Možno število metov je 1,2,3,...
- Streljamo v tarčo. Možni izid je katerakoli točka v krogu.

Iskanje boljšega modela je trajalo še dobrih 100 let!

Razmah uporabe v 19. stoletju

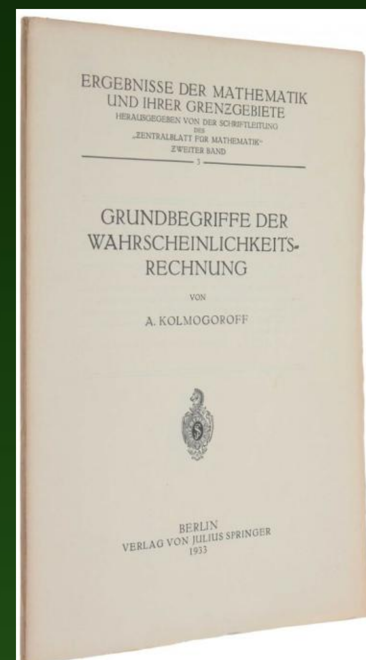
- Legendre, Gauss: Metoda najmanjših kvadratov
- Adrain, Gauss: Normalna porazdelitev
- Čebišev: Slučajne spremenljivke, neenakost Čebiševa,
- Markov, Ljapunov: posplošitev centralnega limitnega izreka
- Uporabe v astronomiji, geodeziji, zavarovalništvu, biologiji, kemiji, fiziki delcev.
- Konec 19. stoletja se na verjetnost gleda kot na del fizike.

Začetek 20. stoletja:

- Znameniti matematik David Hilbert na kongresu 1900 omeni problem aksiomatizacije verjetnostnega računa kot enega od glavnih izzivov matematike v 20. stoletju.
- Fiziki raziskujejo Brownovo gibanje (nenavadno gibanje mikroskopskih delcev v vodi). Einstein predlaga verjetnostni model (1905), ki ga potrdijo eksperimentalno (Perrin, 1926), a zanj ni ustreznih matematičnih metod.
- Ideje kvantne fizike in drugi fizikalni modeli prav tako zahtevajo nova matematična orodja za nadaljni teoretičen razvoj verjetnosti, povzročajo pa tudi nove paradokse in odpirajo filozofska vprašanja (determinizem proti naključnosti).

Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903-1987)

- Ruski matematik, izhaja iz teorije množic.
- Leta 1933 v nemščini objavi delo Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeits-Rechnung (Temelji verjetnostnega računa), ki postavi danes splošno sprejete teoretične osnove verjetnosti.



Aksiomi Kolmogorova (1933):

Verjetnostni prostor je trojica **(Ω, F, P)**, ki jo sestavljajo:

- **Množica izidov Ω**, ki je poljubna neprazna množica,
- **Množica dogodkov F** je sigma-algebra, to je, takšna neprazna družina podmnožic množice **Ω**, da zanjo velja:
  - **F** vsebuje prazno množico;
  - Če **F** vsebuje množico **A**, potem vsebuje tudi njen komplement $\mathbf{A^C}$**;**
  - Če **F** vsebuje množice $\mathbf{A_1, A_2, \ldots}$, potem vsebuje tudi števno unijo $\mathbf{\bigcup_{i \in N} A_i}$.
- **Verjetnostna funkcija P,** ki vsakemu dogodku iz **F** priredi število na intervalu **[0,1]**, in zanjo velja:
  - $P(\emptyset)=0$,
  - Če so $\mathbf{A_1, A_2, \ldots}$ paroma disjunktni dogodki, potem je $\mathbf{P(\bigcup_{i \in N} A_i) = \sum_{i \in N} P(A_i)}$.

Zgled: Met kocke.

- Množica izidov **Ω** je {1,2,3,4,5,6}.
- Množica dogodkov **F** je kar družina vseh podmnožic **Ω.**

Dogodki so torej na primer:

- – prazen dogodek {};
- – gotov dogodek {1,2,3,4,5,6};
- – pade sodo pik {2,4,6};
- – pade najmanj 5 pik {5,6}

- Verjetnostna funkcija **P** je v tem primeru funkcija **P**(A)=|A|/6.

Zgled: Met 2 poštenih kovancev.

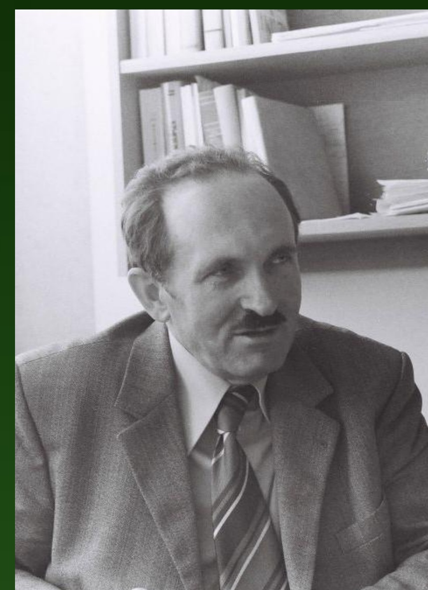
- Množica izidov **Ω** je {CC,CG,GC,GG}.
- Množica dogodkov **F** je lahko družina vseh podmnožic **Ω**, ki ima 16 elementov. Smiselne pa so tudi manjše sigma-algebre, naprimer:
  - **F** = {{ }, {CC,CG},{GC,GG},**Ω**} ali
  - **F** = {{ }, {CC}, {GG}, {CC,GG}, {CG, GC}, {CG,GC,CC},{CG,GC,GG}, **Ω**}

Verjetnostna funkcija **P** je v tem primeru funkcija **P**(A)=|A|/4.

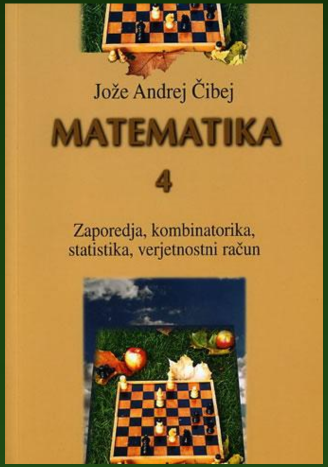
Verjetnost v Sloveniji

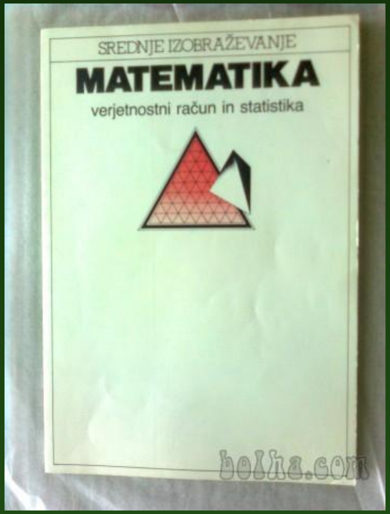
- Aktuar in statistik **Ivo Lah (1896-1979)** je napisal vrsto izvirnih razprav in učbenik o statistiki v financah (1949), ki pa ni bil politično dobrodošel.
- Po njem se imenujejo tudi Lahova števila v kombinatoriki.

- Alojzij Vadnal: Elementarni uvod v verjetnostni račun (1959)
- Rajko Jamnik: Verjetnostni račun (1971), prvi visokošolski učbenik

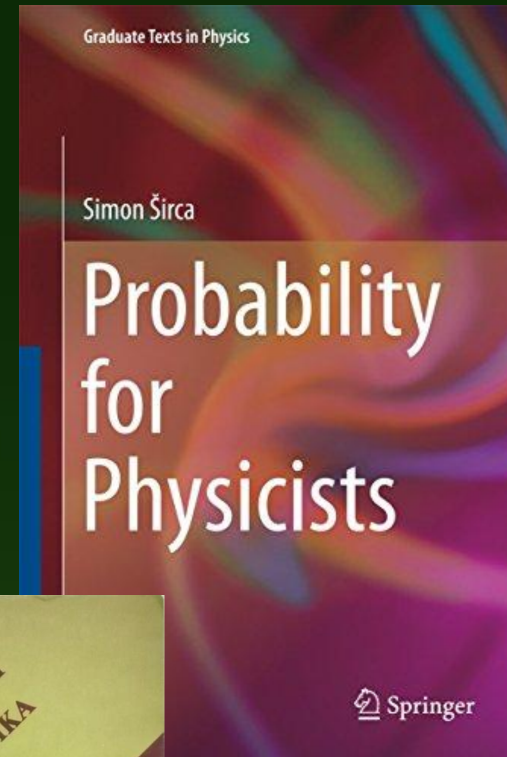


- **Jože Andrej Čibej (1953-2011)**: vrsta srednješolskih učbenikov o verjetnosti in visokošolskih učbenikov statistike za ekonomiste.
- Okoli 1980 ključen pri uvajanju pouka verjetnosti v srednje šole s seminarji za gimnazijske profesorje.





- Danes se verjetnost in/ali statistika predavata praktično na vseh slovenskih fakultetah, tako družboslovnih kot naravoslovnih.



Viri:

- J. Hoffmann-Jorgensen: Probability with a view towards statistics, vol.1, CRC Press
- D. Knuth: The Art of Computer Programming, vol. 4.
- Različni članki o matematikih iz Wikipedije