

FRANCE AVSEC, ALEKSANDER COKAN,
IVAN MOLINARO, IVAN PUCELJ,
BRANKO ROBLEK, IVAN ŠTALEC,
MARJAN VAGAJA

ZBIRKA VAJ
IZ ARITMETIKE, ALGEBRE IN ANALIZE
ZA III. RAZRED SREDNJIH ŠOL

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS
Ljubljana 1986

- g) $11x^2 + 24xy + 4y^2 + 54x + 128y - 85 = 0$
 h) $144x^2 - 120xy + 25y^2 - 325x - 780y - 5915 = 0$
 i) $25x^2 + 25y^2 - 14xy - 114\sqrt{2}x + 78\sqrt{2}y + 18 = 0$
 j) $18x^2 + 8xy + 33y^2 + 204 = 0$
 k) $-7x^2 + 7y^2 - 48xy + 110x + 20y - 75 = 0$
 l) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$
 m) $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$
 n) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 8x + 6 = 0$
 o) $26x^2 + 19y^2 + 4\sqrt{2}xy + 4(1 - 6\sqrt{2})x - 4(3 + 2\sqrt{2})y + 68 = 0$
 p) $16x^2 - y^2 - 32x + 16 = 0$
 r) $4x^2 + y^2 - 4xy + 12x - 6y + 9 = 0$
 s) $25x^2 - 120xy + 144y^2 + 150x - 1539 - 360y = 0$
 š) $4x^2 + 9y^2 - 52x + 102y + 458 = 0$
 t) $8x^2 - 4\sqrt{2}xy + y^2 + 12\sqrt{2}x - 6y + 45 = 0$
 u) $11x^2 - 96xy + 39y^2 + 10x - 180y - 25 = 0$
 v) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$
 z) $5x^2 + 74xy + 5y^2 - 266\sqrt{2}x + 182\sqrt{2}y - 2198 = 0$

XV/5. Pregled krivulj drugega reda

Ugotovi, v katero skupino krivulj drugega reda spada in kakšno množico točk predstavlja krivulja, ki ima enačbo:

- $x^2(2 - \sqrt{3}) + 2xy + y^2(2 + \sqrt{3}) - 6\sqrt{2 - \sqrt{3}}x - 6\sqrt{2 + \sqrt{3}}y + 29 = 0$
- $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 6x + 6\sqrt{3}y - 24 = 0$
- $2x^2 + 72xy + 23y^2 + 100x + 550y + 575 = 0$
- $54x^2 - 4\sqrt{21}xy + 71y^2 + (40\sqrt{21} + 300)x + (80 - 150\sqrt{21})y + 1925 = 0$
- $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 7 = 0$
- $x^2 + 80y^2 - 8\sqrt{5}xy - 2x + 8\sqrt{5}y + 1 = 0$
- $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 6\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y + 14 = 0$
- $25x^2 + 8\sqrt{2}xy + 11y^2 + 12\sqrt{2}x + 6y + 30 = 0$
- $110x^2 - 4\sqrt{35}xy + 178y^2 + (6\sqrt{35} + 20)x + (6 - 20\sqrt{35})y + 23 = 0$
- $93x^2 - 142y^2 - 40\sqrt{3}xy + (32\sqrt{3} - 18)x - (8 + 72\sqrt{3})y - 19 = 0$

XVI. KOMBINATORIKA

XVI/1. Algebra množic

- Podaj z elementi tele množice:
 - cifre petiškega številskega sestava,
 - vse trimestne dvojiske številke (na primer 1 zapiši kot 001),
 - vse produkte s po tremi faktorji s prašteviloma 2 in 3,
 - $\{x; x = 2^i, i = 1, 2, \dots, 5\}$,
 - kompleksne ničle polinoma $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1!$
- Izmed množic \mathcal{N} , \mathcal{L} , \mathcal{Q} , \mathcal{R} in \mathcal{C} navedi tiste, v katere spadajo naslednja števila:
 - $-2/3$;
 - π^2 ;
 - $1-\bar{i}$;
 - $(\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ)^6!$
- Ali je relacija pripadnosti » \in « ekvivalenčna relacija? Utemeljitev!
- Dana je množica $\mathcal{M} = \{T(x, y); 2x + y > 1\}$. Navedi nekaj njenih elementov! Ugotovi in zapiši, ali dane točke leže v \mathcal{M} ali ne:
 $T_1(1, 0)$, $T_2(1, -\frac{1}{2})$, $T_3(-1, 3)$, $T_4(-\frac{1}{2}, -1)!$
 Načrtaj sliko dane množice v ravninskem pravokotnem koordinatnem sistemu!
- Dana je množica $\mathcal{M} = \{T(x, y); x^2 + 9y^2 \leq 9\}$. Navedi nekaj njenih elementov! Ugotovi in zapiši, ali dane točke leže v \mathcal{M} ali ne:
 $T_1(0, 1)$, $T_2(1, -1)$, $T_3(-2, \frac{1}{2})$, $T_4(3, 0)!$
 Upodobi dano množico v ravninskem pravokotnem koordinatnem sistemu!
- Dani sta točki A in B ravnine Σ in pozitivno realno število $r > AB$. Kaj so slike tehle množic:
 - $\mathcal{E} = \{T; (AT + BT \leq r) \wedge (T \in \Sigma)\}$;
 - $\mathcal{H} = \{T; (AT \leq r) \wedge (T \in \Sigma)\}$;
 - $\mathcal{K} = \{T; (|AT - BT| = AB/2) \wedge (T \in \Sigma)\}$?
 - V ravnini Σ sta dani premica p in zunaj premice točka G. Kaj je slika množice $\mathcal{P} = \{T; (GT = TT_0) \wedge (TT_0 \perp p) \wedge (T_0 \in p) \wedge (T \in \Sigma)\}$?

7. V kakšnih medsebojnih relacijah so množice \mathcal{N} , \mathcal{L} , \mathcal{M} , \mathcal{R} in \mathcal{C} ?
8. Dane so množice: $\mathcal{A} = \{a\}$, $\mathcal{B} = \{a, b\}$, $\mathcal{C} = \{c, d\}$, $\mathcal{D} = \{a, c, d\}$, in $\mathcal{E} = \{b, c, d\}$. Ugotovi, ali veljajo trditve:
 a) $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$; b) $\mathcal{B} = \mathcal{D}$; c) $\mathcal{E} \supset \mathcal{C}$; č) $\mathcal{B} \not\subset \mathcal{E}$!
9. Ali sta množici $\mathcal{A} = \{a, b, c, e\}$ in $\mathcal{B} = \{c, b, a, a, e\}$ med seboj enaki?
10. Katere izmed navedenih trditvev so pravilne in katere so nepravilne (\mathcal{V} je prazna množica):
 a) $\mathcal{V} \subset \{\mathcal{V}\}$; b) $\mathcal{V} \subset \{a\}$; c) $\mathcal{V} \in \{\mathcal{V}\}$;
 č) $a \in \{\{a, b\}\}$; d) $\{a\} \in \{a\}$; e) $\mathcal{V} \notin \{a, b\}$?
11. Naj bo \mathcal{R} univerzalna množica. Podaj z elementi naslednje množice:
 $\mathcal{A} = \{x; x + 3 = 0\}$, $\mathcal{C} = \{x; x^2 + 4 = 0\}$,
 $\mathcal{B} = \{x; x^2 - 3x - 10 = 0\}$, $\mathcal{D} = \{x; x = -x\}$!
12. Poišči potenčno množico množice $\{1, 2\}$!
13. Določi potenčno množico množice $\{\{\mathcal{V}\}, 1, 2\}$!
14. Naj bo \mathcal{N} univerzalna množica, \mathcal{A} množica praštevil in \mathcal{B} množica sestavljenih števil. Določi množicama \mathcal{A} in \mathcal{B} komplementa!
15. Naj bo \mathcal{N} univerzalna množica. Določi komplementa množicama:
 a) $\mathcal{A} = \{3k; k \in \mathcal{N}\}$; b) $\mathcal{B} = \{a - b; (a > b) \wedge (a, b \in \mathcal{N})\}$!
16. V množici 32 igralnih kart označimo ase z \mathcal{A} , križe s \mathcal{K} in pike s \mathcal{P} . Opiši naslednje množice:
 a) $\mathcal{A} \cup \mathcal{K}$; b) $\mathcal{A} \cap \mathcal{P}$; c) $\mathcal{K} \cup \mathcal{P}$; č) $\mathcal{K} \cap \mathcal{P}$ d) $\mathcal{A} \cup \mathcal{K} \cup \mathcal{P}$!
17. Naj bo množica naravnih števil od 1 do 30 univerzum. V univerzumu sestavljajo podmnožico \mathcal{A} števila, ki so deljiva z 2, podmnožico \mathcal{B} števila, ki so deljiva s 3, in podmnožico \mathcal{C} števila, ki so deljiva s 5. Podaj z elementi množice: $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$, $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$, $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ in $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$!
18. \mathcal{R} je univerzalna množica, $\mathcal{A} = \{x; -1 \leq x \leq 3\}$, $\mathcal{B} = \{x; 0 \leq x \leq 4\}$ in $\mathcal{C} = \{x; 2 \leq x \leq 5\}$. Predoči dane množice na številski premici in preveri:
 a) $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap \mathcal{C} = (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$;
 b) $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup \mathcal{C} = (\mathcal{A} \cup \mathcal{C}) \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$!
19. Naj bo \mathcal{R} univerzalna množica. Pokaži, da je:
 a) $\{x; x^3 + 14x^2 + 56x + 64 = 0\} = \{x; x + 2 = 0\} \cup \{x; x + 4 = 0\} \cup \{x; x + 8 = 0\}$;
 b) $\{x; 4^{-\sqrt{x}} = 0,25\} = \{x; 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0\} \cap \{x; 7^{x+1} - 7^{2x-1} = 42\}$;
 c) $\{x; 10^{\log x - 1} = 1\} = \{x; \log x^2 \cdot \log x^3 = 6\} \cap \{x; x^{\log x} = x^3/100\}$!
20. Kaj je unija množic $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$, ... $\{n, n + 1\}$, ...?

21. Dane so množice $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{B} = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ in $\mathcal{C} = \{3, 4, 5, 6\}$. Poišči:
 a) \mathcal{A}' ; b) $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$; c) $(\mathcal{A} \cap \mathcal{C})'$; č) $\mathcal{A}' \cup \mathcal{C}'$; d) $\mathcal{B} - \mathcal{C}$!
22. Dane so množice $\mathcal{U} = \{m, n, p, r, s, t\}$, $\mathcal{A} = \{m, n, p, r\}$ in $\mathcal{B} = \{m, p, s\}$. Določi te množice:
 a) $\mathcal{A} - \mathcal{B}$; b) $\mathcal{B} - \mathcal{A}$; c) $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) - (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$;
 č) $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) - (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$!
23. Dane so podmnožice realnih števil $\mathcal{U} = \{x; -1 < x < 6\}$, $\mathcal{A} = \{x; 0 < x \leq 3\}$ in $\mathcal{B} = \{x; 1 \leq x < 5\}$. Pokaži, da velja:
 a) $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})' = \mathcal{A}' \cap \mathcal{B}'$;
 b) $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})' = \mathcal{A}' \cup \mathcal{B}'$!
24. Podjetje razpisuje 3 prosta delovna mesta za fizike, kemike in matematike. Na prvem delovnem mestu ne more biti zaposlen matematik, na drugem pa ne kemik. Prikaži množico vseh možnih razporedov strokovnjakov na delovnih mestih! Zapiši podmnožice razporedov,
 a) v katerih je več matematikov kot fizikov ali kemikov,
 b) v katerih delovna mesta zasedajo strokovnjaki različnih strok,
 c) v katerih ni fizika,
 č) v katerih je vsaj en kemik!
25. Označi iskane podmnožice prejšnje naloge zapored z znaki \mathcal{P} , \mathcal{L} , \mathcal{R} in \mathcal{S} ! Kaj potem pomeni:
 a) $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$; b) $\mathcal{P} \cup \mathcal{R}$; c) \mathcal{L} ; č) \mathcal{S}' ; d) $\mathcal{P} - \mathcal{S}$?
26. Določi grafično presek danih množic v ravninskem pravokotnem koordinatnem sistemu:
 $\mathcal{A} = \{T(x, y); 2x - y + 2 \geq 0\}$, $\mathcal{C} = \{T(x, y); x + 2y - 4 \leq 0\}$,
 $\mathcal{B} = \{T(x, y); y + 2 \geq 0\}$, $\mathcal{D} = \{T(x, y); 3x + y - 6 \leq 0\}$!
27. Določi grafično unijo in presek danih množic v ravninskem pravokotnem koordinatnem sistemu:
 $\mathcal{A} = \{T(x, y); 9x^2 + 25y^2 < 225\}$, $\mathcal{B} = \{T(x, y); 9x^2 - 16y^2 > 144\}$!
28. Dani sta množici: $\mathcal{M} = \{T(x, y); y \leq x^2 - 3x + 2\}$,
 $\mathcal{N} = \{T(x, y); y \geq -x^2 + 3x - 2\}$.
 Načrtaj v ravninskem pravokotnem koordinatnem sistemu slike množic:
 a) \mathcal{M} ; b) \mathcal{N} ; c) $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$; č) $\mathcal{M} - \mathcal{N}$; d) $(\mathcal{M} - \mathcal{N}) - (\mathcal{M} \cup \mathcal{N})$;
 e) $(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) - (\mathcal{M} \cap \mathcal{N})$; f) $\mathcal{M}' \cap \mathcal{N}'$; g) $(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})'$!
29. Dano je nenegativno realno število r in točka S ravnine. Določi presek tehle dveh podmnožic ravnine:
 $\{T; TS \geq r\}$ in $\{P; PS \leq r\}$!

- *30. Naj bodo dane tri množice: $\mathcal{A} = \{a; \frac{1}{2}(a + a^*) \leq 0\}$,
 $\mathcal{B} = \{a; (-i/2)(a - a^*) \leq 0\}$,
 $\mathcal{C} = \{a; |a| \leq 1\}$!

Načrtaj v ravnini kompleksnih števil slike množic:

\mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , $\mathcal{A} \cap (\mathcal{C} - \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \cap \mathcal{C})'$, $((\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}))'$!

*31. Dokazi:

- $((\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{C} \cap \mathcal{D}))' = (\mathcal{A}' \cup \mathcal{B}') \cap (\mathcal{C}' \cup \mathcal{D}')$;
- $((\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}')) \cup ((\mathcal{A}' \cup \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A}' \cup \mathcal{B}')) = \mathcal{U}$;
- $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}') \cap (\mathcal{A}' \cup \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A}' \cup \mathcal{B}') = \mathcal{V}$;
- $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{C}) \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$;
- $\mathcal{A} - (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{A} - \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} - \mathcal{C})$;
- $\mathcal{A} - (\mathcal{A} - (\mathcal{B} - (\mathcal{B} - \mathcal{C}))) = \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$!

XVI/2. Preslikave in moč množice

1. Pokaži, da obstaja obratno enolična preslikava med množico zaporednih števil $\{1, 2, \dots, 25\}$ in množico $\{a, b, \dots, z\}$ vseh črk slovenske abecede!

2. Ali obstaja obratno enolična preslikava:

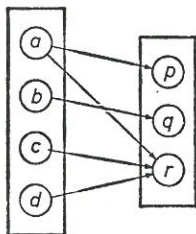
- med množico učencev {Igor, Irena, Sonja} in rečema {stol, klop},
- med množicama točk dveh koncentričnih krožnic z različnima polmeroma,
- med množico kompleksnih števil $a + a'i$ in množico nenegativnih realnih števil $\sqrt{(a^2 + a'^2)}$?

*3. Prikaži obratno enolično preslikavo med množicama:

- $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ in $\{3, 6, 9, 12, \dots\}$,
- pozitivnih celih števil in negativnih celih števil,
- celih števil in naravnih števil!

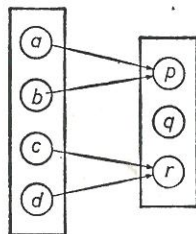
4. Kakšne so preslikave med množicama $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$ in $\mathcal{B} = \{p, q, r\}$ v primerih:

a)



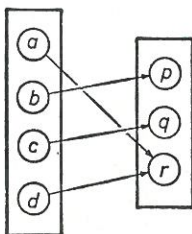
Sl. 1

b)



Sl. 2

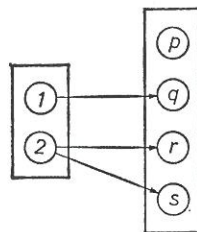
*c)



Sl. 3

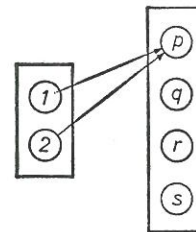
5. Kakšne so preslikave med množicama $\mathcal{A} = \{1, 2\}$ in $\mathcal{B} = \{p, q, r, s\}$ v primerih:

a)



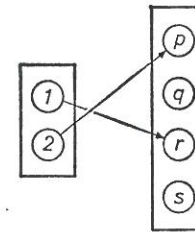
Sl. 4

b)



Sl. 5

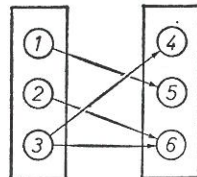
*c)



Sl. 6

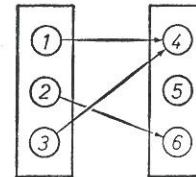
6. Kakšne so preslikave med množicama $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$ in $\mathcal{B} = \{4, 5, 6\}$ v primerih:

a)



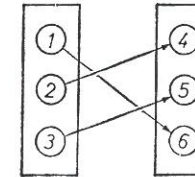
Sl. 7

b)



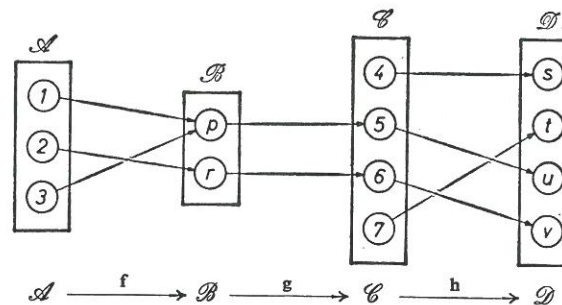
Sl. 8

*c)



Sl. 9

*7. Opiši preslikave $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, $g: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ in $h: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$:



Sl. 10

8. Založba ponuja v nakup tri knjige A, B in C, izmed katerih se za A odloči 630, za B 520, za C 487, za A in B 125, za A in C 150, za B in C 112 ter za A, B in C 50 naročnikov. Koliko je vseh naročnikov? Koliko je naročnikov za A, pa ne za B, in koliko za C, pa ne za A? Koliko je naročnikov za A ali B, pa ne za C, in koliko za B, pa ne za A ali C?

9. Deset znancev je ob nekem srečanju ugotovilo, da vsi prebirajo revije A, B in C in sicer samo A dva, samo B eden, samo C eden, A in B eden, A in C trije, B in C štirje.

- Koliko izmed njih bere vse tri revije?
- Koliko jih prebira B in C, pa ne A, koliko pa A in B, pa ne C?
- Koliko jih prebira A ali C, pa ne B?
- Koliko jih prebira ali A in B ali A in C?

10. Dijaki v razredu lahko obiskujejo literarni, marksistični in enega od jezikovnih krožkov (latinskega ali nemškega). Le 5 dijakov ne obiskuje nobenega krožka, sicer pa po en krožek: literarnega 4, marksističnega 3, latinskega 1 in nemškega 4; po dva krožka: literarnega in marksističnega 2, literarnega in latinskega 3, literarnega in nemškega 1, marksističnega in latinskega 2, marksističnega in nemškega 5; in po tri krožke: literarnega, marksističnega in latinskega 1, literarnega, marksističnega in nemškega 3.

- Koliko je vseh dijakov?
- Koliko jih obiskuje posamezne krožke?
- Koliko jih obiskuje marksistični ali latinski, pa ne literarni krožek?
- Koliko jih obiskuje literarnega, pa ne marksistični ali latinski krožek?

11. Z množicama $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $\mathcal{B} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ napravi unijo in presek in pokaži, da velja glede moči tale formula:

$$m(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) + m(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) + m(\mathcal{B})!$$

*12. Pokaži s sliko, da velja:

$$m(\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = m(\mathcal{A}) + m(\mathcal{B}) + m(\mathcal{C}) - m(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) - m(\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) - m(\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) + m(\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C})!$$

XVI/3. Permutacije končne množice

1. Zapiši vse obratno enolične preslikave množice \mathcal{N}_3 nase! Preslikave podaj najprej s funkcijskimi tabelami, nato pa krajše le z drugimi vrsticami tabel kot različne razporede elementov dane množice! Nariši tudi ustrezne grafe!

2. Zapiši:

- vse obratno enolične preslikave množice \mathcal{N}_2 nase in
- vse preostale preslikave množice \mathcal{N}_2 vase!
- Koliko je vseh preslikav množice z dvema elementoma vase?

V primerih a) in b) podaj preslikave najprej s funkcijskimi tabelami, nato pa krajše le z drugimi vrsticami tabel kot različne razporede elementov dane množice! Nariši tudi ustrezne grafe!

3. a) Zapiši kot razporede permutacije množice \mathcal{N}_3 . Oblikuj še vse permutacije s ponavljanjem te množice!

b) Koliko jih je?

4. Napravi vse permutacije — razporede elementov danih množic:

- $\{1, 2, 3, 4\}$; b) $\{A, I, M, R\}$!

Pri oblikovanju permutacij črk vzamemo kot osnoven razpored tisti razpored, v katerem so črke urejene po abecednem redu.

5. Zmnoži:

$$a) \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 2, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 2, 1 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ 2, 3, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ 1, 2, 3 \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ 1, 2, 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ 2, 3, 1 \end{pmatrix};$$

$$c) \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \\ 2, 4, 1, 5, 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \\ 3, 4, 5, 1, 2 \end{pmatrix}; \quad \text{č) } \begin{pmatrix} a, b, c, d \\ b, d, a, c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, b, c, d \\ c, b, d, a \end{pmatrix}!$$

6. Poišči obratno permutacijo:

$$a) \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 2, 1 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 3, 6, 4, 2, 1, 5 \end{pmatrix}; \quad c) \begin{pmatrix} a, b, c \\ b, c, a \end{pmatrix}; \quad \text{č) } \begin{pmatrix} a, b, c, d, e \\ c, a, b, e, d \end{pmatrix}!$$

XVI/4. Preslikave končne množice v drugo končno množico

1. Zapiši s funkcijskimi tabelami vse preslikave:

- množice \mathcal{N}_4 v množico $\mathcal{M} = \{x, y\}$ (variacije s ponavljanjem reda 4 iz dveh elementov),
- množice \mathcal{N}_2 v množico \mathcal{N}_4 (variacije s ponavljanjem reda 2 iz štirih elementov),
- množice \mathcal{N}_3 v množico $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$ (variacije s ponavljanjem reda 3 iz treh elementov)!

Dobljene variacije podaj tudi krajše samo z drugimi vrsticami tabel!

2. Podaj z drugimi vrsticami funkcijskih tabel vse preslikave:

- $f: \mathcal{N}_5 \rightarrow \mathcal{N}_2$ (variacije s ponavljanjem reda 5 iz dveh elementov),
- $g: \mathcal{N}_2 \rightarrow \mathcal{A} = \{a, b, c\}$ (variacije s ponavljanjem reda 2 iz treh elementov),
- $h: \mathcal{N}_3 \rightarrow \mathcal{N}_3$ (variacije s ponavljanjem reda 3 iz treh elementov)!

3. Zapiši s funkcijskimi tabelami injektivne preslikave (glej nal. 5 iz pogl. XVI/2):

- množice \mathcal{N}_2 v množico \mathcal{N}_4 (variacije brez ponavljanja reda 2 iz štirih elementov),
- množice \mathcal{N}_3 na množico $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$ (variacije brez ponavljanja reda 3 iz treh elementov ali permutacije množice \mathcal{A})!

Dobljene variacije podaj tudi samo z drugimi vrsticami tabel!

4. Zapiši kot nabore variacije brez ponavljanja:
- reda 3 iz elementov množice $\{1, 2, 3, 4\}$;
 - reda 2 iz elementov množice $\{a, b, c, d, e\}$!
5. Izmed variacij brez ponavljanja različnih redov množice črk $\{A, I, L, S, V\}$ izberi nekaj takih, ki imajo v slovenskem jeziku besedni pomen (npr. LIV, SILA itd.)!
Prav tako v primeru $\{I, K, N, O, P, T\}$!

XVI/5. Osnovni izrek kombinatorike

- Na koliko načinov lahko opremiš sobo s sliko in plastiko, če izbiraš med 5 slikami in 3 plastikami? Nariši tudi ustrezno kombinatorično drevo!
- Nekdo ima v garderobi 4 pare čevljev, 2 obleki in 3 različna pokrivala. Na koliko načinov se lahko s tem obuje, obleče in pokrije? Nariši tudi ustrezno drevo!
- Iz izhodišča 0 se začnemo pomikati za enoto v levo ali desno po osi x . Pot se konča v točkah 2 ali -2 ali ko pridemo drugič v točki 1 ali -1 . Z uporabo kombinatoričnega drevesa določi število takih poti!
- Šahista A in B se merita v dvoboju. Dvoboj se konča z zmago tistega, ki dobi dve partiji, ali pa neodločeno po dveh remijih. Z uporabo kombinatoričnega drevesa ugotovi, na koliko načinov lahko odigrata dvoboj?
- Iz Zagreba v Ljubljano lahko prideš z avionom, avtobusom ali vlakom, iz Ljubljane v Postojno pa z avtobusom ali vlakom. Na koliko načinov lahko prideš iz Zagreba v Postojno?
- Iz kraja A v kraj B in nazaj pelje pet avtobusov, iz kraja B v kraj C in nazaj pa trije. Na koliko načinov lahko prideš
 - iz A v C skozi B,
 - iz A v C skozi B in nazaj,
 - iz A v C skozi B in nazaj, tako da nazaj grede ne uporabiš istega avtobusa?
- Na koliko načinov lahko ekipa 5 enakovrednih šahistov določi igralca na I. in II. deski?
- Na koliko načinov lahko desetčlanski odbor izvoli predsednika, podpredsednika in blagajnika?
- Deklici sta nabrali na travniku 15 marjetic, 18 kalužnic, 17 lučk in 23 tulpik. Na koliko načinov si lahko razdelita cvetke? Upoštevaj, da pri razdelitvi lahko ena ali druga deklica ne dobi nobene cvetke!
- Dva vneti gobarja sta nabrala n_1 jurčkov, n_2 lisičk, n_3 turkov, ..., n_k karžljev. Na koliko načinov si lahko razdelita gobe, če naj dobi vsak vsaj m_1 jurčkov, m_2 lisičk, m_3 turkov, ..., m_k karžljev?

- Določi število vseh deliteljev števila 720!
- Določi število vseh deliteljev danega naravnega števila n , ki ga je mogoče takole razcepiti v produkt potenc praštevil:

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_l^{k_l}$$

- Koliko je vseh preslikav množice \mathcal{N}_3 v množico \mathcal{N}_2 , to je naborov po 3 elementov množice \mathcal{N}_2 , koliko pa vseh preslikav množice \mathcal{N}_2 v množico \mathcal{N}_3 ? Koliko je v drugem primeru injektivnih preslikav (glej nal. 5 iz pogl. XVI/2)?
- Iz žare z n različno oštevilčenimi kroglicami r -krat izvlečemo kroglico. Koliko je vseh naborov števil,
 - če kroglico po vsakem izvlečenju spet vrnemo v žaro,
 - če izvlečenih kroglic ne vračamo v posodo?
 Ali je potrebna za r kaka omejitev?
- Na koliko načinov lahko iz kupa 32 kart potegnemo zapored 3 karte,
 - če izvlečene karte vračamo,
 - če izvlečenih kart ne vračamo?
- Na koliko načinov je mogoče vreči tri igralne kocke? Koliko je metov, ki pokažejo različno število pik na posameznih kockah?
- Morsejevi znaki sestojijo iz pik in črtic posamič ali v sestavi po 2, 3, 4 in 5 elementov skupaj. Koliko je vseh znakov?
- Na stavnem listu športne stave je treba 12 mest v stolpcu izpolniti s ciframi 0, 1, 2 glede na predviden neodločen rezultat oz. zmago prvega ali drugega nogometnega partnerja. Koliko je vseh možnosti? Koliko je možnosti, če z gotovostjo pričakujemo neodločen rezultat dveh partnerjev in zmage treh prvih in dveh drugih moštev? Koliko je možnosti, če izvzamemo možnost poraza štirih na prvih mestih zapisanih partnerjev ter možnost neodločenega izida v dveh srečanjih?
- Koliko štirimestnih števil lahko zapišemo s ciframi 3, 4, 5? Koliko števil se začne s cifro 5?
- Koliko je vseh petmestnih desetiških števil (0 kot prvo cifro izvzamemo)? Koliko jih je z zadnjo cifro 0 in koliko s prvima dvema sodima ciframa?
- Koliko trimestnih števil lahko zapišemo s ciframi 1, 3, 5, 6, 8, 9?
 - Koliko teh števil je sodih in koliko lihih?
 - Koliko je večkratnikov števila 5?
- Reši prejšnjo nalogo v primeru, da se cifre ne ponavljajo!
- Koliko trimestnih števil lahko zapišemo s ciframi 0, 2, 4, 6, 8 (0 kot prvo cifro izvzamemo)
 - s ponavljanjem cifer,
 - brez ponavljanja cifer?

Variacije

24. Koliko števil, večjih od 3000 in manjših od 5000, dobiš s sedmimi ciframi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, če se cifre
a) lahko ponavljajo, b) ne ponavljajo?
25. Koliko petcifernih števil lahko zapišemo s številkami 1, 3, 5, 18, 70?
26. Iz črk besede BEOGRAD sestavljamo »besede« — skupine s tremi različnimi črkami.
a) Koliko »besed« lahko sestavimo?
b) Koliko »besed« lahko sestavimo le iz soglasnikov?
c) Koliko »besed« se začne in konča s soglasnikom?
č) Koliko »besed« se konča s samoglasnikom?
d) Koliko »besed« se začne s črko D?
e) Koliko »besed« vsebuje črko R?
27. S koliko znaki se lahko sporazumevajo skavti z uporabo 5 raznobarnih zastavic, ki jih razvrščajo po 3 eno za drugo? Koliko znakov sestavijo z razvrščanjem po 5 ali manj zastavic eno za drugo (signal z nič zastavicami izvzamemo)?
28. Koliko različnih vrst vozovnic mora natisniti železniška uprava za relacijo, na kateri je 77 kolodvorov in postajališč?
29. Za neko relacijo mora uprava natisniti 5852 različnih vrst vozovnic. Koliko ima ta relacija postajališč?
30. Pri katerih n je:
a) $V_n^2 = 380$; b) $V_n^4 = 360$; c) $V_{n+1}^3 = 3n$; č) $3 \cdot V_{n+1}^4 = V_n^5$?
31. Pri katerem številu elementov je število variacij brez ponavljanja 4. reda dvakratnik števila variacij brez ponavljanja 3. reda (2. reda)?
32. Pri katerem številu elementov je število variacij brez ponavljanja 2. reda za k manjše od števila variacij s ponavljanjem 2. reda?

XVI/6. Število permutacij končne množice

1. Na koliko načinov lahko prispejo trije povabljeni A, B in C na obisk? Zapiši te možnosti?
2. Košarkarska peterica se postavi v vrsto, da pozdravi publiko. Na koliko načinov se igralci lahko razvrstijo?
3. V steklenici je n različnih (enakih) kroglic. Na koliko načinov jih lahko stresemo iz steklenice, če gre skozi grlo steklenice hkrati le ena kroglica?
4. Mati ima sedem dopoldanskih opravil: pri zobozdravniku, pri šivilji, v knjižnici, v šoli, na trgu, v mlekarni in obisk pri starših. Na koliko načinov lahko vse opravi, če gre najprej k zobozdravniku?

5. Koliko permutacij množice $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
a) se začne z 9,
b) se ne začne niti z 1 niti s 3,
c) se ne konča s 75?
- *6. Iz osnovnega zaporedja črk poišči:
a) 43. permutacijo črk $\{I, K, L, O, R\}$;
b) 117. permutacijo črk $\{A, M, N, O, R\}$;
c) 581. permutacijo črk $\{D, I, K, N, R, U\}$!
- *7. Katere permutacije osnovnega zaporedja črk so besede:
a) LISA, SILVA; b) ARHIV, VIHAR; c) MONTER, REMONT?
8. Zapiši in preštej permutacije s ponavljanjem znakov:
a) A, A, M, N; b) A, A, A, R, R; c) +, +, +, +, —, —!
9. Koliko je permutacij s ponavljanjem črk besede:
a) KROKAR; b) FILOZOFIJA; c) BARBARA?
10. Koliko je vseh zaporedov 8 krogel, med katerimi je 5 belih, 3 so pa črne?
11. Na koliko načinov lahko razvrstimo 9 zastavic, med katerimi so 3 zastavice bele, 4 rdeče, 2 sta pa modri?
12. Na koliko načinov lahko nastane produkt x^5y^7 iz posameznih faktorjev x in y ?
13. Napiši in preštej permutacije s ponavljanjem množice \mathcal{N}_4 , v katerih nastopa en element trikrat (v katerih nastopata dva različna elementa)!
14. Koliko je permutacij in še vseh permutacij s ponavljanjem:
a) množice \mathcal{N}_2 ; b) množice \mathcal{N}_3 ; c) množice \mathcal{N}_4 ?
Posploši rezultat!
15. Na koliko načinov lahko razporedimo 9 knjig na polici,
a) če morata dve določeni knjigi stati skupaj,
b) če morajo tri določene knjige stati na določenem koncu?
16. Na koliko načinov lahko razporedimo na polici 3 leposlovne knjige, 4 učbenike in 2 strokovni knjigi,
a) če morajo istovrstne knjige stati skupaj,
b) če morajo le učbeniki stati skupaj?
17. Na koliko načinov lahko sede v vrsti 3 moški in 4 ženske:
a) pri poljubni razporeditvi,
b) če naj sede moški skupaj in ženske skupaj,
c) če morajo le moški sedeti skupaj,
č) če morajo ženske sedeti na lihih mestih?
18. Na koliko načinov lahko razporedimo za ravno mizo 5 moških in 2 ženski, če naj ti dve ne sedita skupaj?

19. Na koliko načinov lahko sedi za okroglo mizo 6 oseb?
20. Na koliko načinov lahko sede za okroglo mizo 3 moški in 2 ženski:
- pri poljubni razporeditvi,
 - če morata dva določena moška sedeti skupaj,
 - če ženski ne smeta sedeti skupaj?
- *21. Kvadrat, ki ima dolžino stranice enako naravnemu številu n , razdeli s kvadratno mrežo n^2 enotskih kvadratov. Skrajnje levo spodnje oglišče naj bo O, skrajnje desno zgornje oglišče naj bo K. Telo T se lahko giblje le po stranicah in po diagonalah enotskih kvadratov tako, da se ves čas približuje cilju K. Na koliko načinov lahko pride telo T iz O v K?
22. Dokaži, da je izraz $(n^2)!/(n!)^n$ naravno število!
23. Dokaži, da je izraz $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) \cdot (n-1)!$ večkratnik naravnega števila n , če je n lih!

XVI/7. Podmnožice končne množice

- Napravi vse podmnožice s tremi elementi množice $\{a, b, c, a, \beta, \gamma\}$!
- Pri katerih n velja:
 - $4C_n^2 = C_{n+2}^3$; b) $C_{n+2}^n = 15$; c) $\frac{5}{2} C_n^{n-1} = C_{n+1}^3$; č) $C_n^3 = \frac{5}{3} C_n^5$?
- Na šahovskem turnirju sodeluje 15 igralcev. Koliko partij bo odigranih, če igra vsak z vsakim po eno partijo?
- V vrečki so 4 bele in 3 rdeče kroglice različnih velikosti. Iz vrečke izvlečemo 3 kroglice hkrati. Koliko je različnih izborov:
 - ne glede na barvo kroglic,
 - 2 belih in 1 rdeče kroglice,
 - kroglic enake barve?
- Na nekem sprejemu je bilo 15 medsebojnih predstavitev. Koliko ljudi se je srečalo?
- Koliko tetiv je določenih z 10 (n) točkami krožnice?
- Koliko konveksnih kotov določa n poltrakov iz skupne točke?
- Koliko kotov določa n premic ravninskega šopa?
- Koliko trikotnikov je določenih z n točkami, med katerimi ni nobena trojica na isti premici?
- V ravnini je danih $n > 3$ točk, od katerih nobena trojica ne leži na isti premici in nobena četverica na isti krožnici. Koliko različnih krožnic določa teh n točk?
- Koliko paralelogramov nastane, če presekamo skupino 4 vzporednic z drugo skupino 7 vzporednic?

- V ravnini je 7 premic, izmed njih so si 4 vzporedne. Koliko presečišč največ določajo?
- Koliko presečišč določa n premic v ravnini, med katerimi je m vzporednic, če gresta skozi vsako presečišče natanko dve premici?
- Koliko različnih premic določa n točk v ravnini, če je med njimi m kolinearnih?
- V koliko točkah se sekajo diagonale konveksnega n -kotnika, če nobena trojica diagonal ne gre skozi isto točko?
- Elektronski računalnik bere znake s kartice, na kateri je mogoče vsak stolpec preluknjati v 12 vrsticah. Največ tri luknjice v stolpcu določajo en znak. Koliko različnih znakov se da sestaviti?
- Izmed treh inženirjev in 7 tehnikov je treba sestaviti komisijo 2 inženirjev in 3 tehnikov. Na koliko načinov je to mogoče.
 - če je lahko vsak član komisije,
 - če mora biti en določen inženir v komisiji,
 - če dva določena tehnika ne smeta biti v komisiji?
- Odbor ima 25 članov, med njimi so 4 inženirji. Na koliko načinov lahko sestavijo 3 člansko komisijo, v kateri naj bo vsaj 1 inženir?
- Študent naredi izpit, če odgovori vsaj na 4 vprašanja, ki jih izbere z listka, na katerem je 6 vprašanj.
 - Na koliko načinov lahko opravi izpit?
 - Koliko možnosti je, če mora odgovoriti na prvi dve vprašanji?
 - Koliko možnosti je, če mora odgovoriti vsaj na dve od prvih treh vprašanj?
- Na koliko različnih načinov lahko postavimo na šahovnico pet trdnjav tako, da se ne napadajo,
 - če so vse trdnjave povsem enake med seboj,
 - če so trdnjave opremljene z različnimi znaki?
- Na koliko načinov lahko porazdelimo $n = m_1 + m_2 + \dots + m_k$ elementov v k urejenih predalčkov po m_1 v prvi, po m_2 v drugi predalček itd. (vrstnega reda elementov v predalčkih ne upoštevamo)?
- Na koliko načinov lahko porazdelimo $n = km$ elementov v k urejenih predalčkov po m elementov v vsakega (vrstnega reda elementov v predalčkih ne upoštevamo)? Koliko je porazdelitev, če predalčki niso urejeni?
- Dokaži, da je izraz $(ab)!/((a!)^b b!)$ naravno število! Prav tako za izraz $(ab)!/((b!)^a a!)$, a in b sta naravni števili.
- Na koliko načinov lahko porazdelimo n elementov v k urejenih predalčkov, če je v vsakem predalčku lahko poljubno število elementov? Koliko je porazdelitev elementov množice \mathcal{N}_3 v dva predalčka? Zapiši jih!
- Na koliko načinov lahko 15 vojakov hkrati razvrstimo
 - na dve stražarski mesti po 7 na prvo in 8 na drugo,

- b) na tri stražarska mesta po 4 na prvo, 6 na drugo in 5 na tretje stražarsko mesto?
26. Na koliko načinov lahko 10 igrac razdelimo trem otrokom, ce naj najmlajši dobi 4 igrace, druga dva pa po 3?
27. Nogometno moštvo mora odigrati do konca prvenstva še 5 tekem, v katerih planira 2 zmagi, 2 poraza in en neodločen rezultat. Na koliko načinov lahko realizira plan?
28. Na koliko načinov lahko razdelimo 24 kart
- a) med 4 osebe tako, da dobi vsak 6 kart,
b) med 6 oseb tako, da dobi vsak 4 karte?
29. V žari je 9 krogel. Na koliko načinov lahko trikrat zapored izvlečemo po tri krogel, ce izvlečenih krogel ne vračamo v žaro?
30. Na koliko načinov lahko 6 knjig razdelimo
- a) med tri učence tako, da vsak dobi 2 knjigi,
b) v tri skupine po 2 knjigi, ce ni važen vrstni red skupin?
31. Koliko rešitev v naravnih številih ima enačba $x + y + z + v = 10$?
32. Koliko rešitev v naravnih številih ima pri danem naravnem številu n tale enačba z r neznankami x_i :
- $$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$$
33. Koliko rešitev ima v množici naravnih števil enačba $x + y + z + v = 28$, ce veljajo obenem pogoji $x > 4, y > 5, z > 6, v > 7$?

XVI/8. Binomski izrek

1. Razvij po binomskem izreku:

- a) $(2a - 1)^5$; b) $\left(\frac{x}{3} + \frac{3}{x}\right)^4$; c) $(ab - c^2)^3$; č) $(1 + \sqrt{x})^4$;
d) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^6$; e) $(1 + a^x)^5$; f) $(e^x + e^{-x})^4$!

2. Izračunaj:

- a) $(\sqrt{2} + 1)^6 + (\sqrt{2} - 1)^6$; b) $(2 + i)^5 + (2 - i)^5$;
c) $(a + 1)^4 - (a - 1)^4$; č) $(3 + \sqrt{3})^3 - (3 - \sqrt{3})^3$!

3. Napiši:

- a) peti člen v razvoju $(x^2 - y^2)^{10}$;
b) četrti člen v razvoju $(a + \sqrt{b})^5$;
c) deseti člen v razvoju $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{13}$;
č) šesti člen v razvoju $(1 - \sqrt{a})^9$;

d) tretji člen v razvoju $\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}\right)^8$;

e) k -ti člen v razvoju $(a + b)^n, 1 \leq k \leq n$!

4. a) Poišči člen, ki vsebuje a^{10} v izrazu $(2a^2 - b)^8$!

b) Poišči člen, ki vsebuje y^6 v izrazu $(3xy^2 + z^3)^7$!

5. Izračunaj:

a) $1 \cdot 02^5$; b) $1 \cdot 001^6$; c) $0 \cdot 97^3$; č) 99^4 !

6. Razvoj $(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n$

lahko zapišemo z uporabo sumacijskega simbola takole:

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r.$$

Binomski izrek lahko posplošimo:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_k^{r_k}, \text{ kjer je } r_1 + r_2 + \dots$$

$\dots + r_k = n$, upoštevati pa moramo vse mogoče seštevke z vsoto n ($0 \leq r_i \leq n$).
Izračunaj $(x + y + z)^3$!

7. a) Poišči člen, ki vsebuje faktorja a^{11} in b^4 , v izrazu $(2a^3 - 3ab^2 + c)^6$!

b) Poišči člen, ki vsebuje faktorja x^3 in y^5 , v izrazu $(xy - y^2 + z^3)^5$!

8. Kolikšen je koeficient pri x^{17} v razvoju izraza $(1 + x^5 + x^7)^{20}$?

9. Iz enakosti $(1 + u + u^2)^n = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_{2n} u^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} a_i u^i$ sledi $a_k = a_{2n-k}$. Dokaži!

10. Nariši graf funkcije $f(x) = \binom{n}{x}, x = 0, 1, 2, \dots, n$ za:

a) $n = 4$; b) $n = 5$.

11. Na koliko načinov lahko osebek podeduje kvečjemu n dednih lastnosti?

12. Koliko je vseh deliteljev števila 1190?

13. Otrok ima pet kovancev: za 5 par, za 10 par, za 20 par, za 50 par in za 1 dinar. Koliko različnih denarnih vrednosti lahko sestavi s tem premoženjem?

14. Na koliko načinov lahko profesor izmed 8 dijakov pokliče enega ali več dijakov?

15. Na koliko načinov lahko izmed 11 znancev povabiš 3 ali več od njih na zabavo?

16. Števila Pascalovega trikotnika imajo mnogo zanimivih lastnosti. Izpelji naslednji formuli:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = 2^{n-1}, \quad \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}$$

17. Dokaži tole lastnost binomskih simbolov:

$$k \binom{m}{k} = m \binom{m-1}{k-1}$$

18. Dokaži enakost:

$$16 \binom{2n}{2} + 32 \binom{2n}{4} + \dots + 8(2n-2) \binom{2n}{2n-2} + 8 \cdot 2n = n \cdot 2^{2n+2}$$

19. Če je izraz $a^p - 1$ deljiv s praštevilom p , je deljiv tudi s kvadratom p^2 . Dokaži!

20. Dokaži, da za $n \geq r$ velja:

$$\sum_{k=r}^n \binom{k}{r} = \binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \dots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

Uporabi lastnost binomskih simbolov:

$$\binom{s}{r} + \binom{s}{r+1} = \binom{s+1}{r+1} \text{ za } s = r+1, r+2, \dots, n.$$

Kaj ti da gornja izpeljava za $r = 1$?

21. Razvij v zvezi $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$ levo stran z uporabo binomskega izreka! Kateri zanimivi formuli dobiš, če primerjaš realni in imaginarni komponenti na obeh straneh?

22. Dokaži zvezi:

$$a) \binom{4m}{1} - \binom{4m}{3} + \binom{4m}{5} - \dots - \binom{4m}{4m-1} = 0$$

$$b) \binom{4m}{0} - \binom{4m}{2} + \binom{4m}{4} - \dots + \binom{4m}{4m} = (-4)^m$$

23. Izvedi formule:

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + \dots + n \binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1},$$

$$\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}, \dots$$

$$\sum_{k=m}^n k(k-1) \dots (k-m+1) \binom{n}{k} = n(n-1) \dots (n-m+1) \cdot 2^{n-m}$$

24. Izvedi s sklepanjem tole zvezo:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

25. Iz enakosti: $(1+x)^n (1+x^{-1})^n = x^{-n} (1+x)^{2n}$, ($x \neq 0$) izvedi formulo:

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$$

XVII. VERJETNOSTNI RAČUN

XVII/1. Dogodki in algebra dogodkov

1. Dve krogli x in y lahko razporedimo v predale I, II, III na več načinov. Vsako tako razporeditev imamo za elementarni dogodek.

- Zapiši vse elementarne dogodke, tj. osnovno množico dogodkov!
- Preštej elementarne dogodke in tudi izračunaj to število!
- Koliko je vseh dogodkov?

Zapiši naslednje dogodke:

- $\mathcal{A} = \{\text{prvi predal je prazen}\}$,
- $\mathcal{B} = \{\text{v drugem predalu je natanko ena krogla}\}$,
- $\mathcal{C} = \{\text{drugi ali tretji predal je prazen}\}$,
- $\mathcal{D} = \{\text{drugi in tretji predal sta prazna}\}$!
- Poišči: $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{C}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{D}$ in \mathcal{A}' !

Kateri izmed teh dogodkov je gotov dogodek in kateri nemogoč?

h) Kateri izmed dogodkov \mathcal{C} in \mathcal{D} je način drugega?

2. Tri kroglice x, y, z porazdelimo v predala I in II. Vsako tako razporeditev štejemo za elementarni dogodek.

- Zapiši osnovno množico dogodkov in jih preštej!
- Opiši in napiši dva sestavljena dogodka!
- Poišči unijo in presek teh dveh dogodkov!

3. Dve enaki krogli x in x lahko razporedimo v predale I, II, III na več načinov. Enaki razporeditvi imamo za isti elementarni dogodek.

- Zapiši vse elementarne dogodke!
- Koliko je elementarnih in koliko vseh dogodkov?

Zapiši naslednje dogodke:

- $\mathcal{A} = \{\text{prvi predal je prazen}\}$,

- č) $\mathcal{B} = \{\text{v drugem predalu je samo ena krogla}\}$,
 d) $\mathcal{C} = \{\text{drugi ali tretji predal je prazen}\}$,
 e) $\mathcal{D} = \{\text{drugi in tretji predal sta prazna}\}$!
 f) Poišči: $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{C}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{D}$ in \mathcal{A} !

Kateri izmed dogodkov je gotov dogodek in kateri je nemogoč?

- g) Kateri izmed dogodkov \mathcal{C} in \mathcal{D} je način drugega?

4. Tri enake krogle x , x , x porazdelimo v predala I in II. Dve enaki razporeditvi imamo za isti elementarni dogodek.

- a) Zapiši osnovno množico dogodkov in jih preštej!
 b) Opiši in napiši dva sestavljena dogodka!
 c) Poišči unijo in presek teh dveh dogodkov!

5. Zapiši osnovno množico elementarnih dogodkov poskusa: dinar vržemo dvakrat! Upoštevaj vrstni red, v katerem padeta grb in številka!

- a) Izrazi z elementarnimi dogodki naslednja sestavljena dogodka: $\mathcal{A} = \{\text{dinar je padel obakrat na isto stran}\}$, $\mathcal{B} = \{\text{padel je natanko en grb}\}$!
 b) Napiši še algebro dogodkov!

6. Zapiši vse elementarne dogodke poskusa: dinar vržemo trikrat! Upoštevaj vrstni red, v katerem padeta grb in številka! Izrazi z elementarnimi dogodki naslednje sestavljene dogodke: $\mathcal{A} = \{\text{vsaj dvakrat je padel grb}\}$, $\mathcal{B} = \{\text{vsaj enkrat je padla številka}\}$, $\mathcal{C} = \{\text{v zadnjem metu je padla številka}\}$, $\mathcal{D} = \{\text{dinar je padel vsaj dvakrat zapored na isto stran}\}$, $\mathcal{E} = \{\text{dinar je padel izmenoma na različne strani}\}$, $\mathcal{F} = \{\text{vsaj enkrat je padel grb}\}$!

7. Dva strelca zapored ustrelita v tarčo in jo zadeneta ali zgrešita. Zadetka označimo s p_1 in p_2 , zgrešitvi pa s q_1 in q_2 , kjer indeksa naznačujeta strelca. Zapiši osnovno množico elementarnih dogodkov in naslednje dogodke: $\mathcal{A} = \{\text{prvi strelec zgreši}\}$, $\mathcal{B} = \{\text{oba strela se enako izideta}\}$, $\mathcal{C} = \{\text{izida obeh strelcev sta različna}\}$, $\mathcal{D} = \{\text{vsaj en strelec zadene}\}$!

8. V žari so štiri oštevilčene kroglice: 1, 2, 3, 4. Iz žare izvlečemo hkrati dve kroglici. Rezultat poskusa je elementarni dogodek.

- a) Zapiši vse elementarne dogodke!
 b) Zapiši z ugodnimi elementarnimi dogodki naslednja sestavljena dogodka: $\mathcal{A} = \{\text{izvlečeni kroglici sta označeni z lihima številoma}\}$, $\mathcal{B} = \{\text{izvlečeni kroglici sta označeni s sodima številoma}\}$!

9. Iz množice $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ izberemo najprej eno, nato pa iz preostalih štirih še eno število.

- a) Zapiši osnovno množico elementarnih dogodkov!
 b) Napiši sestavljeni dogodek: $\mathcal{A} = \{\text{izbrali smo dve sodi števili}\}$!

10. V žari so štiri oštevilčene kroglice: 1, 2, 3, 4. Iz žare potegnemo kroglo in jo vrnemo, nato potegnemo še eno. Rezultat poskusa je elementarni dogodek.

- a) Zapiši množico vseh elementarnih dogodkov!
 b) Napiši še sestavljena dogodka: $\mathcal{A} = \{\text{izvlečeni kroglici sta označeni z lihima številoma}\}$ in $\mathcal{B} = \{\text{izvlečeni kroglici sta označeni s sodima številoma}\}$!

11. Dvigalo v osemnadstropni stolpnici starta s 6 potniki. Razporeditev potnikov po nadstropjih je elementarni dogodek.

- a) Na koliko različnih načinov se teh 6 ljudi lahko porazgubi v 8 nadstropjih, tj. koliko je vseh elementarnih dogodkov?
 b) Koliko je vseh dogodkov?

12. Razporeditev r oštevilčenih krogel v p oštevilčenih predalov imamo za elementarni dogodek.

- a) Koliko je elementarnih dogodkov?
 b) Koliko je vseh dogodkov?

13. Prebivalstvo nekega naselja lahko klasificiramo po spolu v moške in ženske, po starosti pa v polnoletne in nepolnoletne. Slučajen izbor moškega prebivalca kot dogodek označimo z \mathcal{M} , polnoletnega pa s \mathcal{P} , kaj pomenijo dogodki: \mathcal{M}' , \mathcal{P}' , $\mathcal{M} \cup \mathcal{P}$, $\mathcal{M} \cap \mathcal{P}$, $\mathcal{M} \cap \mathcal{P}'$ in $\mathcal{M}' \cap \mathcal{P}'$?

14. \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} naj bodo trije poljubni dogodki. Poišči izraze za dogodke, sestavljene iz teh treh dogodkov:

- a) $\mathcal{X} = \{\text{nastopi samo dogodek } \mathcal{A}\}$,
 b) $\mathcal{Y} = \{\text{nastopijo vsi trije dogodki}\}$,
 c) $\mathcal{Z} = \{\text{nastopi vsaj eden izmed dogodkov}\}$,
 č) $\mathcal{W} = \{\text{nastopita dogodka } \mathcal{A} \text{ in } \mathcal{B}, \text{ toda ne } \mathcal{C}\}$!

XVII/2. Verjetnost dogodka in aksiomi verjetnostnega računa

1. Iz besede MATEMATIKA izberemo slučajno neko črko. Izbor črke je elementarni dogodek.

- a) Kolika je verjetnost, da bo to črka A?
 b) Kolika je verjetnost, da bo to samoglasnik?

2. Slučajno izberemo eno izmed števil: $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

- a) Kolika je verjetnost, da bo to število sodo?
 b) Kolika je verjetnost, da bo to število sodo in deljivo s 3?

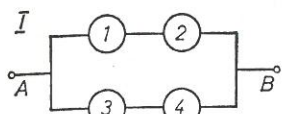
3. Izmed 30 dijakov v razredu jih 20 obiskuje literarni krožek, 10 matematični krožek in 5 oboje. Kolika je verjetnost, da slučajno izbran dijak

- a) ne obiskuje niti literarnega niti matematičnega krožka,
 b) obiskuje literarni ali matematični krožek?

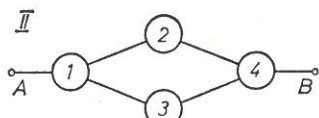
4. V posodi so enaki listki oštevilčeni s števkami od 1 do 1000. Slučajno potegnemo iz posode en listek. Kolika je verjetnost, da je število na listku:
- dvociferno,
 - deljivo s 50,
 - večje od 250 in manjše od 376?
5. V žari s 1000 kroglicami je 200 belih, 300 rdečih in 500 črnih. Na slepo izvlečemo eno kroglico. Kolika je verjetnost, da je ta kroglica:
- bela, b) rdeča ali črna, c) da ni rdeča?
6. V žari so tri bele, 5 rdečih in 2 zeleni krogli. Na slepo izvlečemo 5 krogel. Kolika je verjetnost, da izvlečemo 2 beli 2 rdeči in 1 zeleno kroglo?
7. V žari je 20 kroglic: 5 belih, 5 modrih, 5 zelenih, in 5 rdečih. Slučajno izberemo štiri kroglice. Kolika je verjetnost,
- da so kroglice raznobarvne,
 - da ni med njimi ne bele ne zelene kroglice,
 - da ne izvlečemo zelene kroglice?
8. Žara vsebuje 5 oštevilčenih krogel: 1, 2, 3, 4, 5. Ko smo jih premešali, potegnemo iz žare 3 krogle hkrati. Kolika je verjetnost, da bodo krogle, ki smo jih potegnili iz žare, označene z lihimi števili?
9. Pravilo igre se glasi: vrzi dinar in če pade grb, se igra konča, če pa ne pade, vrzi ponovno; meči, dokler ne pade grb. Poišči približke za statistično verjetnost dogodkov: igra se je končala po 1, 2, 3 metih, ki jih označimo z *A*, *B*, *C*! Igro stokrat ponovi, zabeleži rezultate in izračunaj ustrezne približke za iskane verjetnosti!
10. Od 60 vprašanj, ki so jih dijaki dobili za maturo, jih je neki dijak preštudiral le 50. Kolika je verjetnost, da bo dijak na listku z dvema vprašanjema potegnil vprašanja, za kateri je pripravljen?
11. V razredu je 30 učencev, med njimi se eden piše Novak. Profesor na slepo pokliče dva dijaka. Kolika je verjetnost, da je Novak med izbrancema?
12. Med 100 žarnicami je 9 pokvarjenih. Slučajno izberemo tri žarnice. Kolika je verjetnost, da je med izbranimi natanko 1 pokvarjena?
13. V škatli je 9 oštevilčenih listkov s števili od 1 do 9. Naenkrat izvlečemo dva listka. Kolika je verjetnost,
- da sta obe števili sodi,
 - da sta obe števili lihi,
 - da je eno število sodo, drugo pa liho?
14. Pri loteriji je 90 kroglic oštevilčenih s števkami od 1 do 90. Kolika je verjetnost, da med 5 kroglicami, ki jih izvlečemo hkrati, najdemo kroglici s števkama 31 in 65?

15. Iz kupa 32 kart izvlečemo na slepo 4 karte. Kolika je verjetnost,
- da sta dve karti rdeči, dve pa črni, b) da so to srce, karo, križ in pik?
16. Od 32 kart dobi igralec 8 kart. Na koliko načinov je to mogoče? Kolika je verjetnost, da dobi igralec 1 srce, 4 kare, 1 križ in 2 pika?
17. V žari imamo štiri krogle označene s števkami 1, 2, 3, 4. Ko smo jih dobro premešali, potegnemo iz žare drugo za drugo vse štiri krogle. Kolika je verjetnost, da bomo krogle potegnili iz žare po vrsti, kot so zaznamovane?
18. V žari imamo 5 krogel označenih s števkami 1, 2, 3, 4, 5. Potem, ko smo jih dobro premešali, potegnemo iz žare tri krogle eno za drugo. Kolika je verjetnost, da so vse tri krogle označene z lihimi števili?
19. Na straneh igralne kocke so števila: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Kolika je verjetnost, da pri metu dveh takih kock vržemo vsoto 4 ali 6?
20. Kolika je verjetnost, da v treh metih kocke vržemo natanko dvakrat šestico?
21. Hkrati vržemo tri kocke. Kolika je verjetnost,
- da vržemo tri različna števila, b) da padeta dve šestici in ena štirica,
 - da vržemo vsoto 5, c) da vržemo vsoto 3 ali 14 pik,
 - da vržemo več kot 15 pik?
22. Kolika je verjetnost, da pri metu treh kock pade šestica in da hkrati vse tri kocke pokažejo različno število pik?
23. Kolika je pri metu treh kovancev verjetnost, da padeta dva grba in ena številk?
24. Med 10 izdelki imajo trije napako. Katero število defektnih izdelkov je najverjetnejše med 6 slučajno izbranimi izdelki?
25. Med r izdelki je k defektnih. Kolika je verjetnost, da bo med s izbranimi izdelki ravno l defektnih?
26. Igralno kocko vržemo dvakrat zapored. Pri tem lahko vržemo različne vsote pik. Kateri vsoti pik imata najmanjšo in katera vsota največjo verjetnost?
27. Da bi zmanjšali število iger $2r$ športnih društev, smo vsa športna društva razdelili v dve enaki skupini. Določi verjetnost, da bosta dve najbolj močni društvi:
- v različnih skupinah, b) v isti skupini!
28. Izračunaj verjetnost, da se kvadrat slučajno izbranega celega števila končuje na 1!
29. Na poltraku je v začetnem trenutku točka v njegovem krajišču. Točka, ki skače po njem, se premakne pri vsakem skoku le za enoto v smislu poltraka ali pa ostane na mestu.
- Kolika je verjetnost, da se bo po n skokih točka premaknila za m enot?
 - Katera lega na poltraku je najverjetnejša po $n = 10$ skokih?
30. Iz žare z N kroglicami izvlečemo na slepo nekoliko kroglic. Kolika je verjetnost, da je število izvlečenih kroglic: a) liho, b) sodo?

31. Imamo dve električni vezji, ki imata po 4 porabnike. Vsak od njih prekine tok z enako verjetnostjo, kar ima lahko za posledico, da sploh prekine tok od A k B. Pri katerem od teh vezij je večja verjetnost, da ne bo prekinjen tok med točkama A in B?

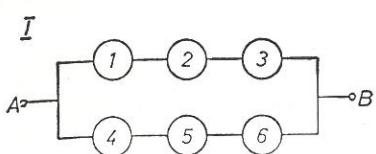


Sl. 13

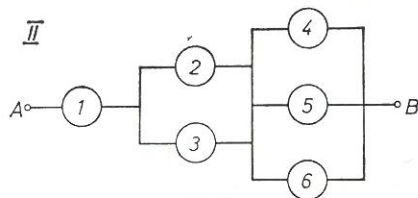


Sl. 14

32. Imamo dve električni vezji, ki imata po 6 porabnikov. Vsak od njih prekine tok z enako verjetnostjo, kar ima lahko za posledico, da sploh prekine tok od A k B. Pri katerem od teh vezij je večja verjetnost, da ne bo prekinjen tok med točkama A in B?



Sl. 15



Sl. 16

XVII/3. Preproste posledice aksiomov

- Štirje dogodki $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$, ki so paroma nezdružljivi, imajo verjetnosti: $P(\mathcal{A}_1) = 0.012$, $P(\mathcal{A}_2) = 0.010$, $P(\mathcal{A}_3) = 0.006$ in $P(\mathcal{A}_4) = 0.002$. Kolika je verjetnost dogodka: $\mathcal{A} = \{\text{nastopi vsaj eden od teh dogodkov}\}$?
- Med 10 elementi je 8 normalnih. Kolika je verjetnost, da med 6 slučajno izbranimi elementi ni defekten več kot eden?
- Kontrolor prevzame od delavca 100 izdelkov, če pri pregledu slučajno izbrane polovice izdelkov ne najde več kot en sam defekten izdelek. Kolika je verjetnost, da bo kontrolor izdelke od delavca sprejel, če je med 100-timi 5 defektnih?
- Iz kupa 32 kart potegnemo karto. Kolika je verjetnost, da je karta: a) as ali sedmica, b) srce ali dama?
- V škatli je 30 enakih listov oštevilčenih s številkami od 1 do 30. Na slepo izvlečemo listek. Kolika je verjetnost, da bo število na njem deljivo z 2 ali s 3?
- Med 12 elementi je 10 defektnih. Kolika je verjetnost, da je med slučajno izbranimi dvema elementoma vsaj eden defekten?
- 100 listov je oštevilčenih s številkami od 1 do 100. Kolika je verjetnost, da izvlečemo listek s številom, ki ni deljivo s 7?

8. V žari je 5 belih, 3 rdeče in 2 črni krogli. Na slepo izvlečemo tri krogli. Kolika je verjetnost, da je vsaj ena krogla rdeča?

9. V loteriji imamo 1000 srečk. Na eno izmed njih zadenemo 5000 din, na 10 po 1000 din, na 50 po 200 din in na 100 srečk po 50 din. Ostale srečke so brez zadetkov. Kolika je verjetnost, da ne bom zadel manj kot 200 din, če izvlečem le eno srečko?

10. Tarča sestoji iz treh področij: I, II, III. Verjetnost zadetka pri enem strelu v I. področje je $P(I) = 0.15$ in analogno $P(II) = 0.23$ ter $P(III) = 0.17$. Kolika je verjetnost, da ne bom zadel tarče?

11. Od 12 deklet v razredu imajo 3 dekleta modre oči. Slučajno izberemo 2 dekleti. Kolika je verjetnost, a) da imata obe modre oči, b) da nobena nima modrih oči, c) da ima vsaj ena modre oči?

12. Iz kupa 32 kart potegnemo na slepo 4 karte. Kolika je verjetnost, da sta med njimi vsaj 2 asa?

13. Če je $P(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = 7/12$, $P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = 1/2$ in $P(\mathcal{B}^c) = 1/4$, poišči $P(\mathcal{A})$ in $P(\mathcal{B})$!

- *14. Dokaži: $P(\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B}) + P(\mathcal{C}) - P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) - P(\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) - P(\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) + P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C})$!

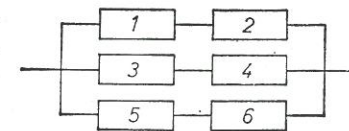
XVII/4. Pogojna verjetnost in neodvisni dogodki

- Iz žare, v kateri je n krogel oštevilčenih s številkami od 1 do n , potegnemo dve krogli zapored tako, da prve ne vrnemo. Kolika je verjetnost, da bomo drugič potegnili kroglo št. 3, če vemo, da smo prvič potegnili kroglo št. 1?
- V žari sta dve beli in tri črne krogli. Iz žare vzamemo zapored dve krogli. Kolika je verjetnost, da sta obe krogli beli, a) če prvo kroglo vrnemo v žaro, b) če prve krogle ne vrnemo v žaro?
- V žari je 7 belih, 5 modrih in 3 črne krogli. Kolika je verjetnost, da zapored izvlečemo najprej belo, nato modro in še črno kroglo, a) če vsakič izvlečeno kroglo vrnemo, b) če izvlečene krogle ne vrnemo?
- V žari je 10 črnih, 20 modrih, 30 zelenih in 40 rdečih krogel. Zapored izvlečemo dve krogli (prvo vrnemo). Kolike so verjetnosti dogodkov: $\mathcal{A} = \{\text{izvlečeni krogli sta zeleni}\}$, $\mathcal{B} = \{\text{nobena izvlečena krogla ni modra}\}$, $\mathcal{C} = \{\text{druga izvlečena krogla ni črna}\}$, $\mathcal{D} = \{\text{prva izvlečena krogla je modra ali zelena, druga pa rdeča}\}$, $\mathcal{E} = \{\text{vsaj ena izvlečena krogla je zelena}\}$, $\mathcal{F} = \{\text{največ ena izvlečena krogla je črna}\}$, $\mathcal{G} = \{\text{le ena izvlečena krogla je rdeča}\}$?
- Iz žare, v kateri so 3 bele in 7 rdečih krogel, vlecemo po eno kroglo in izvlečenih krogel ne vračamo v žaro. Kolike so verjetnosti dogodkov: $\mathcal{A} = \{\text{zapored potegnemo 4 rdeče krogle}\}$, $\mathcal{B} = \{\text{najprej potegnemo 2 beli in nato 2 rdeči krogli}\}$?

6. V dveh žarah so kroglice: v prvi je 5 belih in 10 modrih, v drugi pa 7 belih in 3 modre. Kolika je verjetnost, da potegnemo iz prve in iz druge žare modro kroglico?
7. V dveh žarah so kroglice: v prvi 5 belih, 11 črnih in 8 rdečih, v drugi pa 10 belih, 8 črnih in 6 rdečih. Iz vsake žare potegnemo po eno kroglico. Kolika je verjetnost, da sta izvlečeni kroglici enake barve?
8. V treh žarah I, II, III so zapored 1 bela in 2 črni kroglici, 3 bele in 1 črna kroglica ter 2 beli in 3 črne kroglice. Iz vsake žare potegnemo po eno kroglico. Kolika je verjetnost, da potegnemo 2 beli in 1 črna kroglico?
9. Iz kupa 32 kart potegnemo zapored 2 karti. Kolika je verjetnost, da imata obe oznako križ, a) če prvo karto vrnemo, b) če prve karte ne vrnemo?
10. Iz kupa 32 kart vlečemo karte eno za drugo. Kolika je verjetnost, da bomo izvlekli natanko tri karte pred prvim asom, a) če izvlečene karte vračamo v kup, b) če izvlečenih kart ne vračamo v kup?
11. Iz kupa 32 kart potegnemo zapored 2 karti (prvo vrnemo). Kolike so verjetnosti dogodkov: $\mathcal{A} = \{\text{prva karta ni as, druga pa je}\}$, $\mathcal{B} = \{\text{nobena karta ni kralj}\}$, $\mathcal{C} = \{\text{vsaj ena karta je srce}\}$ in $\mathcal{D} = \{\text{druga karta je pik}\}$?
12. V dveh kupih je po 32 kart. Iz vsakega potegnemo po eno karto. Kolika je verjetnost, da je vsaj ena karta srce as?
13. Kolika je pri metanju kocke verjetnost dogodkov: $\mathcal{A} = \{\text{trikrat zapored vržemo šestico}\}$ in $\mathcal{B} = \{\text{prvič vržemo sodo število pik, drugič šestico, tretjič pa manj kot 4 pike}\}$?
14. Vržemo dve kocki. Kolika je verjetnost, da vsaj na eni vržemo število pik, ki je deljivo s tri?
15. Kolika je verjetnost, da v treh metih dveh kock padé vsaj enkrat isto število pik na obeh kockah?
16. Dva strelca streljata v tarčo z verjetnostima zadetkov p_1 in p_2 . Kolike so verjetnosti dogodkov: $\mathcal{A} = \{\text{oba strelca zadeneta}\}$, $\mathcal{B} = \{\text{noben strelec ne zadene}\}$, $\mathcal{C} = \{\text{zadene samo prvi strelec}\}$, $\mathcal{D} = \{\text{zadene samo drugi strelec}\}$, $\mathcal{E} = \{\text{zadene vsaj eden od obeh strelcev}\}$, $\mathcal{F} = \{\text{vsaj eden od obeh strelcev ne zadene}\}$?
17. Trije strelci hkrati ustrelijo v tarčo z verjetnostmi zadetka 0·4, 0·5 in 0·7. Kolika je verjetnost, a) da bo tarča natanko enkrat zadeta, b) da bo tarča vsaj enkrat zadeta?
18. Dva strelca hkrati ustrelita v tarčo z verjetnostma zadetka 0·80 in 0·65. Kolika je verjetnost, da bo tarča zadeta?
19. Verjetnost, da dijak A reši dani problem je $3/5$, da ga reši dijak B pa $2/3$. Kolika je verjetnost, da bo problem rešen, če poskusita oba?
20. Neka naprava sestoji iz treh delov. Vsak izmed njih se lahko neodvisno od drugih pokvari. Če se pokvari le eden izmed njih, naprava v celoti ne dela več.

Naj bodo v nekem časovnem intervalu Δt zanesljivosti (tj. verjetnosti, da se ne pokvari) posameznih delov: $p_1 = 0\cdot8$, $p_2 = 0\cdot9$ in $p_3 = 0\cdot7$! Kolika je zanesljivost naprave v intervalu Δt ?

21. Verjetnost, da športnik pri enem poskusu izboljša svoj zadnji rezultat, naj bo p . Kolika je verjetnost, da bo izboljšal zadnji rezultat, če se je na tekmovanju odločil za dva poskusa in so izidi poskusov med seboj neodvisni?
22. Iz žare, ki vsebuje n krogel, oštevilčenih s številkami 1, 2, 3, ..., n , potegnemo zapored dve krogli; prvo kroglo vrnemo v žaro, če njena številka ni 1. Kolika je verjetnost, da bomo kroglo s številko 2 izvlekli pri drugem potegu?
23. Dinar vržemo 6 krat. Kolika je verjetnost, da pade večkrat grb kot številka?
24. Za izpit je pripravljenih 30 vprašanj v treh skupinah po 10 vprašanj. Kandidat dobi po eno vprašanje iz vsake skupine. Da opravi izpit, mora odgovoriti vsaj na dve vprašanji. Kolika je verjetnost, da bo napravil izpit, če obvlada iz prve skupine 8 vprašanj, iz druge 5 vprašanj in iz tretje 2 vprašanji?
25. Letalo ima štiri ranljive predele, ki zavzemajo 0·1, 0·2, 0·3 in 0·4 celotne površine. Verjetnosti zadetkov v posamezne predele so proporcionalne površinam predelov. Letalo zruši en zadetek v prvi predel, dva zadetka v drugi predel, trije zadetki v tretji predel in štirje zadetki v četrti predel. Kolika je verjetnost, da se letalo zruši, če ga zadeneta dva izstrelka?
26. Na cilj ustrelimo s treh različnih mest. Verjetnosti zadetka so na prvem mestu 0·1, na drugem 0·2 in na tretjem 0·3. Kolike so verjetnosti, da cilja ne bomo zadeli, da bomo cilj zadeli enkrat, dvakrat, trikrat? Streli so med seboj neodvisni.
27. V žari je 9 belih in 1 rdeča krogla. a) Kolika je verjetnost, da bomo potegnili vsaj enkrat rdečo kroglo, če bomo vlekli desetkrat? b) Kolikokrat bomo morali vleči, da bomo potegnili vsaj enkrat rdečo kroglo z verjetnostjo $\geq 0\cdot9$? Kroglo po vsakem vlečenju vrnemo v žaro!
28. Sistem radarskih postaj zasleduje skupino 10 objektov. Vsak objekt lahko zgubimo pri zasledovanju v časovnem intervalu Δt z verjetnostjo 0·1 in sicer neodvisno od drugih. Kolika je verjetnost, da bomo v danem časovnem intervalu zgubili vsaj en objekt?
29. Imamo 6 porabnikov električnega toka. Za prvega izmed njih je v časovnem intervalu Δt verjetnost, da se pokvari, enaka 0·6, za drugega 0·2 in za ostale štiri 0·3. Poišči verjetnost, da bo v Δt tok prekinjen, če so porabniki vezani: a) zaporedno, b) po sliki:



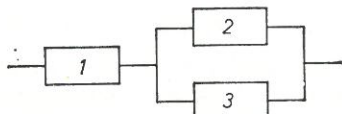
Sl. 17

30. Skupina izdelkov vsebuje 1% izmečka. Kako veliko skupino izdelkov moramo pregledati, da bomo v njej našli vsaj na 1 defekten element z verjetnostjo, ki ni manjša od 0,95?

31. Dokaži, da iz $P(A) = a$ in $P(B) = b$ sledi: $P(A|B) \geq 1/b(a + b - 1)$

32. Dokaži, da iz pogoja: $P(B|A') = P(B|A)$ sledi neodvisnost dogodkov A in B !

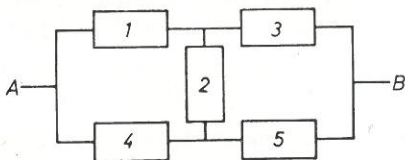
33. Električno vezje je sestavljeno iz elementov, ki v trenutku vključitve z enako verjetnostjo prevajajo električni tok. Stanje kateregakoli elementa ne vpliva na stanje nobenega od ostalih. Znano je, da električno vezje:



Sl. 18

ne prevaja toka.

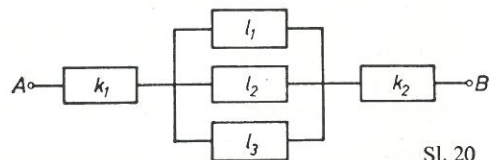
- Kolika je verjetnost, da element 1 ne prevaja električnega toka, če vemo, da vezje ne prevaja toka?
 - Kolika je verjetnost, da element 2 ne prevaja električnega toka, če vemo, da vezje ne prevaja toka?
34. Električno vezje je sestavljeno iz elementov, ki v trenutku vključitve z enako verjetnostjo prevajajo električni tok. Stanje kateregakoli elementa ne vpliva na stanje nobenega od ostalih. Znano je, da električno vezje:



Sl. 19

prevaja električni tok.

- Kolika je potem verjetnost, da element 1 prevaja električni tok?
 - Kolika je pogojna verjetnost, da element 2 prevaja električni tok?
35. Električno vezje je med točkama A in B sestavljeno po shemi:



Sl. 20

Verjetnosti, da se v določenem časovnem intervalu pokvarijo posamezni elementi, so dane s tabelo:

element	k_1	k_2	l_1	l_2	l_3
verjetnost kvara	0,6	0,5	0,4	0,7	0,9

Izračunaj verjetnost prekinitve toka med A in B v omenjenem časovnem intervalu, če so prekinitve posameznih elementov med seboj neodvisne!

36. Naprava sestoji iz štirih delov: a_1, a_2, a_3, a_4 , pri tem del a_2 dublira del a_1 , del a_4 pa a_3 . Če odpove del a_1 ali a_3 , avtomat t_1 ali t_2 takoj vključi dvojnik. Zanesljivosti (verjetnosti, da ne odpovedo) posameznih delov v nekem danem časovnem intervalu in okoliščinah naj bodo: p_1, p_2, p_3, p_4 ; zanesljivosti obeh avtomatov pa naj bosta p ! Kolika je zanesljivost cele naprave, če so kviri med seboj neodvisni?

XVII/5. Polna verjetnost

- Imamo 3 enake žare. V prvi žari sta 2 beli in 1 črna krogla, v drugi 3 bele in 1 črna, v tretji pa 2 beli in 2 črni krogli. Žaro slučajno izberemo in iz nje potegnemo kroglo. Kolika je verjetnost, da bo izvlečena krogla bela?
- Iz žare, v kateri je 6 belih in 4 rdeče krogle, predenemo na slepo dve krogli v žaro z 2 belima in 3 rdečimi krogli, nato pa iz slednje na slepo izvlečemo eno kroglo. Kolika je verjetnost, da je krogla bela?
- V treh žarah so kroglice: v prvi 2 beli in 2 rdeči, v drugi 1 bela in 3 rdeče, v tretji pa 3 bele in 1 rdeča. Najprej prenesemo eno kroglico iz prve v drugo žaro, nato eno kroglico iz druge v tretjo žaro in končno eno kroglico izvlečemo iz tretje žare. Kolika je verjetnost, da je izvlečena kroglica rdeča?
- Izmed 1000 električnih žarnic je 400 izdelanih v prvi tovarni, 350 v drugi in 250 v tretji tovarni. Verjetnosti, da so žarnice standardne kakovosti so za posamezne tovarne zapored 0,95, 0,92 in 0,96. Kolika je verjetnost, da je slučajno izbrana žarnica standardne kakovosti?
- Kolika je verjetnost, da je 10 žarnic, vzeti iz zaboja s 100 žarnicami (med njimi sta kvečjemu 2 defektni), dobrih, če je enako verjetno, da je v zaboju 0, 1, 2 defektnih žarnic?
- Skupina elementov sestoji iz 20% elementov, ki so bili izgotovljeni v I. tovarni, 30% je bilo izgotovljenih v II. in 50% v III. tovarni. Za prvo tovarno je verjetnost, da pri kontroli ne odstranijo defektnega elementa, enaka 0,05, za II. 0,01 in za III. 0,06. Kolika je verjetnost, da bo slučajno izbran element iz te skupine defekten?
- Na letalo ustrelimo dvakrat. Pri prvem strelu je verjetnost zadetka 0,3, pri drugem pa 0,6. Letalo se zruši po enem zadetku z verjetnostjo 0,2, po dveh zadetkih pa z verjetnostjo 0,9. Kolika je verjetnost, da se zruši?

XVII/6. Bayesova formula

- V treh žarah so kroglice: v prvi 2 beli, 1 modra in 1 rdeča, v drugi 1 bela, 2 modri in 2 rdeči, v tretji pa 1 bela, 3 modre in 2 rdeči. Na slepo izberemo žaro in iz nje izvlečemo 2 kroglici: belo in rdečo. Kolika je verjetnost, da smo ju izvlekli iz prve (druge, tretje) žare?

2. Imamo 10 žar. V devetih sta po 2 beli in po 2 črni krogli, v eni pa 5 belih in 1 črna krogla. Iz žare, ki smo jo slučajno izbrali, smo vzeli belo kroglo. Kolika je verjetnost, da je krogla izvlečena iz žare, ki vsebuje 5 belih krogel?
3. V 10 žarah so kroglice: v treh so v vsaki 3 bele in 2 črni krogli, v petih so povsod 4 bele in 3 črne kroglice, v dveh pa je po 1 bela in po 5 črnih krogel. Iz ene izmed žar naenkrat potegnemo 1 belo in 2 črni krogli. Kolika je verjetnost, da smo jih potegnili iz prve (druge, tretje) skupine žar?
4. V dveh žarah so kroglice: v prvi 3 bele in 1 črna, v drugi pa 1 bela in 6 črnih. Iz prve žare prenesemo 1 kroglico v drugo žaro in nato iz druge na slepo potegnemo kroglico. Kolika je verjetnost, da je kroglica črna? Kolika je po potegu črne kroglice verjetnost, da je bila prenesena kroglica bela?
5. V dveh žarah so kroglice: v prvi je 6 belih in 3 rdeče, v drugi pa 3 bele in 8 rdečih. Iz prve žare prenesemo v drugo 2 kroglici, nato pa iz druge na slepo potegnemo belo kroglico. Kolika je verjetnost, da smo iz prve žare v drugo prenesli raznobarvni kroglici?
6. Imamo k_1 žar. V vsaki izmed njih je m_1 belih in n_1 črnih krogel. k_2 žar pa vsebuje po m_2 belih in po n_2 črnih krogel. Iz slučajno izbrane žare izvlečena krogla je bela. Kolika je verjetnost, da je ta krogla izbrana iz prve skupine žar?
7. Znano je, da 96% tovarniške produkcije zadošča zahtevanemu standardu. Poenostavljena shema kontrole prizna za uporabno: standardno produkcijo z verjetnostjo 0.98 in nestandardno z verjetnostjo 0.05. Kolika je verjetnost, da bo izdelek, ki mu je poenostavljena kontrola priznala standard, zadoščal standardu?
8. Med izdelki tovarne je 30% visokokvalitetnih, ostali pa so poprečne kvalitete. Verjetnost, da se visokokvalitetni izdelek ne pokvari v garancijskem času, je 0.9, za izdelek poprečne kvalitete pa je ta verjetnost 0.7. Slučajno izbrani izdelek se v garancijskem roku ne pokvari. Kolika je verjetnost, da je izbran iz skupine visokokvalitetnih izdelkov?
9. Neki izdelek dobavljajo trgovini štiri podjetja. Nabavljanje tega izdelka je pri teh podjetjih v razmerju 1 : 2 : 3 : 4, verjetnosti, da je izdelek neraben, pa so za posamezna podjetja zapored: 0.5, 0.4, 0.3 in 0.2. Izdelek izberemo v trgovini na slepo in ugotovimo, da je neraben. Kolika je verjetnost, da je izbrani izdelek iz tretjega podjetja?
10. Dva strelca streljata na tarčo z verjetnostma zadetka 0.5 in 0.9. En strel zadene. Kolika je verjetnost, da ga je izstrelil prvi (drugi) strelec?
11. Verjetnosti zadetka pri vsakem strelu za tri strelce so $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$ in $\frac{2}{3}$. Pri hkratnem strelu vseh treh strelcev opazimo dva zadetka. Kolika je verjetnost, da je zgrešil tretji strelec?
12. Trije lovci so hkrati ustrelili na divjega prašiča, ki je bil ubit z eno kroglo. Kolike so verjetnosti, da je vepa ubil prvi, drugi, oz. tretji lovec, če poznamo njihove verjetnosti, da zadenejo: 0.2, 0.4 in 0.6?

13. Kolika je verjetnost, da v zaboju s 100 žarnicami (med njimi sta kvečjemu 2 defektni) ni nobene defektne, če med slučajno izbranimi desetimi iz tega zaboja ni nobene defektne in je enako verjetno, da je v zaboju 0, 1, 2 defektnih žarnic?
14. V razredu je 10 dijakov iz mesta, 6 iz okolice in 8 s podeželja. 3 dijaki iz mesta, 2 iz okolice in 6 s podeželja se dobro uče.
 - a) Kolika je verjetnost, da se slučajno izbrani dijak dobro uči?
 - b) Kolika je verjetnost, da je dijak s podeželja, če se dobro uči?

XVII/7. Slučajne spremenljivke

1. Hkrati vržemo dve kocki. Vsota pik, ki jih kocki pokažeta, naj bo slučajna spremenljivka. Podaj tabelo in načrtaj poligon porazdelitve verjetnosti!
2. Hkrati vržemo dve kocki. Pri tem naj na eni kocki pade ξ pik, na drugi pa ζ ali manj pik. ξ naj bo slučajna spremenljivka! Podaj tabelo in načrtaj poligon porazdelitve verjetnosti!
3. Med 10 izdelki v zaboju sta 2 defektna. Iz zaboja na slepo izbiramo izdelke, dokler ne izberemo nedefektnega. Izbranega izdelka ne vrnemo v zaboje. Število izbranih izdelkov je slučajna spremenljivka. Poišči njeno zalogo vrednosti in ustrezne verjetnosti! Slučajno spremenljivko prikaži tabelarično!
4. Iz skupine 100 izdelkov, med katerimi je 10 defektnih, izberemo vzorec petih, da pregledamo njihovo kakovost. Število defektnih izdelkov v vzorcu je slučajna spremenljivka. Poišči zalogo vrednosti te slučajne spremenljivke in ustrezne verjetnosti! Slučajno spremenljivko prikaži tabelarično! Vrednosti verjetnosti izračunaj na tri decimalke natančno!
5. Iz žare, v kateri je 7 črnih in 3 bele kroglice, izvlečemo 3 kroglice. Število belih krogel med izvlečenimi je slučajna spremenljivka. Podaj tabelo porazdelitve verjetnosti!
6. Iz žare, v kateri je 7 črnih in 3 bele kroglice, zapored vlečemo kroglice (in jih ne vračamo), dokler ne potegnemo črne. Število izvlečenih krogel je slučajna spremenljivka. Podaj tabelo porazdelitve verjetnosti!
7. Ustrelimo na tarčo z verjetnostjo zadetka 0.7. Poskusu priredimo slučajno spremenljivko ξ , ki naj zavzame vrednost 0 pri zgrešitvi tarče in 1 pri zadetku tarče. Podaj verjetnostno tabelo slučajne spremenljivke ξ !
8. Strelec ima na razpolago 4 naboje in strelja na cilj do prvega zadetka ali dokler ne porabi vseh štirih nabojev. Število porabljenih nabojev naj bo slučajna spremenljivka! Podaj njeno verjetnostno tabelo, če je verjetnost zadetka pri posameznem strelu 0.8!
9. Kolika je verjetnost, da vržemo s kocko v 5 metih: a) natanko dve petici, b) vsaj enkrat šestico in c) v prvih dveh štirici, v preostalih metih pa vsaj enkrat petico?
10. Kolika je verjetnost, da s tremi kockami v n metih vržemo vsoto 16 pik natanko dvakrat? Izračunaj te verjetnosti za $n = 50, 60, 70$ in 80 na tri decimalke natančno!

11. Kolika je verjetnost, da v 10 metih kovanca vržemo:
- natanko trikrat grb,
 - vsaj dvakrat številko,
 - najprej trikrat številko, nato dvakrat grb, v preostalih metih pa vsaj enkrat grb?
12. V družini je 5 otrok. Kolika je verjetnost, da so trije fantje, če je verjetnost, da se rodi fant, enaka 0·518 in so dogodki med seboj neodvisni?
13. Proti cilju ustrelimo 5-krat z verjetnostjo zadetka 0·8. Kolika je verjetnost (na tri decimalke natančno):
- natanko treh zadetkov,
 - natanko štirih zadetkov,
 - natanko petih zadetkov,
 - vsaj treh zadetkov?
14. Za razrušenje cilja zadostuje en zadenek. Kolika je verjetnost, da bo cilj porušen, če ustrelimo 8-krat z verjetnostjo zadetka 0·1? Izračunaj verjetnost na dve decimalki natančno!
15. Tank 4-krat ustrelj proti cilju z verjetnostjo zadetka 0·3 pri vsakem strelu. Za razrušenje cilja sta potrebna dva zadetka. Kolika je verjetnost (na dve decimalki natančno), da bo cilj porušen?
16. V letalskem dvoboju izstrelj napadalec 4 rakete z verjetnostmi zadetka 0·6. Sovražno letalo izpade iz boja pri enem zadetku z verjetnostjo 0·7 in zagotovo pri dveh zadetkih. Kolika je verjetnost, da ostane sovražno letalo neporaženo?
17. Verjetnost preboja kondenzatorja je po preteku 10000 delovnih ur 0·01. Kolika je verjetnost, da bodo med 100 kondenzatorji po preteku 10000 delovnih ur pokvarjeni več kot trije kondenzatorji?
18. V žaro z 1 belo in 2 črnima krogla sežemo 5-krat in izvlečeno kroglo vsakič spet vrnemo. Število izvlečenih belih krogel je slučajna spremenljivka. Podaj tabelo porazdelitve verjetnosti (na tri decimalke natančno)!
19. Kolika je verjetnost, da v n metih kovanca vržemo grb natanko k -krat ($k = 0, 1, 2, \dots, n$)? Število padlih grbov je slučajna spremenljivka. Podaj tabelo porazdelitve verjetnosti: **a)** za $n = 5$, **b)** za $n = 6$!
20. Hkrati vržemo tri kovance. Število grbov, ki jih lahko pokažejo kovanci, naj bo slučajna spremenljivka! Podaj tabelo porazdelitve verjetnosti!
21. Strelec ustrelj 3-krat v tarčo z verjetnostjo zadetka 0·4. Za vsak zadenek dobi 10 točk. Število točk je slučajna spremenljivka. Podaj tabelo porazdelitve verjetnosti!
22. Za prevoz tovora potrebuje podjetje 6 kamionov. Verjetnost, da je v določenem času posamezen kamion nepokvarjen, je za vsak kamion 0·8. Število nepokvarjenih kamionov v določenem trenutku je slučajna spremenljivka. Podaj tabelo porazdelitve verjetnosti (na tri decimalke natančno)!
23. Vržemo dinar. Če pade grb, je igra končana, če ne pade, mečemo naprej, dokler ne pade grb. Število metov v posameznih igrah je slučajna spremenljivka.

Poišči zalogo vrednosti slučajne spremenljivke in izračunaj pripadajoče verjetnosti!

24. Na krožni poti, po kateri pelje avtomobil, so 4 semaforji. Verjetnosti, da naleti na zaprt, oz. odprt semafor, sta enaki 0·5. Število semaforjev, mimo katerih se peljemo do prvega postanka, je slučajna spremenljivka. Poišči zalogo vrednosti slučajne spremenljivke in izračunaj pripadajoče verjetnosti!

XVII/8. Poprečna vrednost in disperzija slučajne spremenljivke

1. Število točk pri strelu na tarčo naj bo za strelca slučajna spremenljivka z zalogo vrednosti 0, 1, 2, 3, 4. Porazdelitev verjetnosti po zalogi vrednosti slučajne spremenljivke je za dva strelca podana v verjetnostnih tabelah:

	0	1	2	3	4
za A	0·15	0·1	0·05	0·3	0·4

	0	1	2	3	4
za B	0·05	0·1	0·1	0·4	0·35

Izračunaj poprečni vrednosti obeh slučajnih spremenljivk!

2. Poišči poprečni vrednosti in disperziji slučajnih spremenljivk, podanih z verjetnostnima tabelama:

	-2	-1	0	1	2
za ξ_1	0·1	0·2	0·4	0·2	0·1

	-2	-1	0	1	2
za ξ_2	0·05	0·3	0·3	0·3	0·05

3. Izračunaj poprečno vrednost in disperzijo slučajnih spremenljivk, podanih v nalogah 1–8 in 18–22 prejšnjega poglavja!
4. Dinar vržemo 5-krat. Število padlih grbov je slučajna spremenljivka. Poišči njeno poprečno vrednost in disperzijo!
5. Dinar vržemo 5-krat. Maksimalno število zaporedno padlih grbov je slučajna spremenljivka. Poišči njeno poprečno vrednost in disperzijo!
6. Vržemo dve igralni kocki. Naj bo ξ število pik, ki so padle na prvi kocki, η pa število pik, ki so padle na drugi kocki. Poišči razporeditev verjetnosti za slučajni spremenljivki ξ in $\zeta = \max(\xi, \eta)$. Izračunaj tudi poprečni vrednosti in disperziji!
7. Štirje stroji so razporejeni na premici v medsebojnih razdaljah a . Delavec, ki nadzoruje stroje, hodi na slepo od stroja k stroju. Dolžina vsakokratne poti je slučajna spremenljivka. Poišči porazdelitev verjetnosti za slučajno spremenljivko, njeno poprečno vrednost in disperzijo!
8. Stroji so razpostavljeni po krogu. Razdalje med sosednimi stroji so enake a , število strojev pa je n . Delavec popravlja okvare na strojih. Verjetnosti prehoda od stroja k stroju naj bodo enake. Dolžina poti pri vsakem prehodu od stroja

k stroju je slučajna spremenljivka. Poišči porazdelitev verjetnosti za to slučajno spremenljivko, njeno poprečno vrednost in disperzijo,

- a) če se delavec, ki streže strojem, giblje le v enem smislu,
 b) če se pri prehodu od stroja k stroju delavec giblje v smislu, pri katerem je pot najkrajša!
9. Denimo, da je teža telesa enaka le celemu številu gramov od 1 do 10 in sicer z enako verjetnostjo za vsako izmed teh števil. Maso tehtamo s temile sistemi uteži:

1, 2, 2, 5, 10; 1, 2, 3, 4, 10; 1, 1, 2, 5, 10.

Kolikšno je poprečno število uteži, potrebnih za tehtanje pri prvem, drugem in tretjem sistemu,

- a) če uteži postavljamo le v eno čašico,
 b) če uteži postavljamo v obe čašici in jih odbiramo tako, da jih pri vsakem tehtanju odberemo najmanjše število?

XVII/9. Preprost primer markovske verige

1. Markovska veriga je podana z matriko:

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ p & 1-p \end{pmatrix}. \text{ Izračunaj } P(2) \text{ in } P(n)!$$

2. Kakšnim pogojem morajo zadoščati prehodne verjetnosti v markovski verigi

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \text{ da bo } P = P(2) = P(n)?$$

3. Verjetnost, da z drugim strelom zadanem cilj, če sem ga zadel že s prvim, je 0.9, da ga ne zadenem, če ga prej nisem zadel, pa 0.7. Ko sem prvič ustrelil, cilja nisem zadel. Kolika je verjetnost, da ga bom zadel, ko bom ustrelil tretjič, četrtič, petič?
4. Vnet obiskovalec kina in gledališča gre vsak dan v kino ali v gledališče, vendar v gledališče ne gre dva dneva zapored. Če pa gre v kino, je enako verjetno, da gre naslednji dan v kino kot v gledališče. Včeraj je bil v kinu. S kolikšno verjetnostjo bo šel jutri v gledališče, oz. pojutrišnjem in popojutrišnjem v kino? Napiši najprej matriko prehodnih verjetnosti!
5. Študent Peter ima take delovne navade: če neko noč študira, potem je verjetnost, da bo študiral naslednjo noč, 0.2; verjetnost, da dve noči zapored ne študira, pa je 0.7. Če je predvčerajšnjim študiral, koliki sta verjetnosti, da danes in jutri ponoči ne bo študiral? Napiši najprej matriko prehodnih verjetnosti!
6. Stroj je pokvarjen ali pa ne. Verjetnost, da stroj tudi jutri ne bo delal, če je danes pokvarjen, je 0.7, verjetnost, da bo stroj jutri pokvarjen, če danes dela, pa je 0.1.

- a) Kolika je verjetnost, da bo stroj pojutrišnjem delal, če danes dela?
 b) Kolika je verjetnost, da stroj pojutrišnjem ne bo delal, če danes ne dela?
 Napiši tudi matriko prehodnih verjetnosti!

7. S tretjim strelom zagotovo zadenem, če sem s prvim strelom zadel, ako pa s prvim strelom nisem zadel, je verjetnost, da bom zadel s tretjim strelom, enaka a . Kolika je verjetnost, da bom zadel z drugim strelom, če sem s prvim zadel, in kolika je verjetnost, da bom zadel z drugim strelom, če prej nisem zadel?

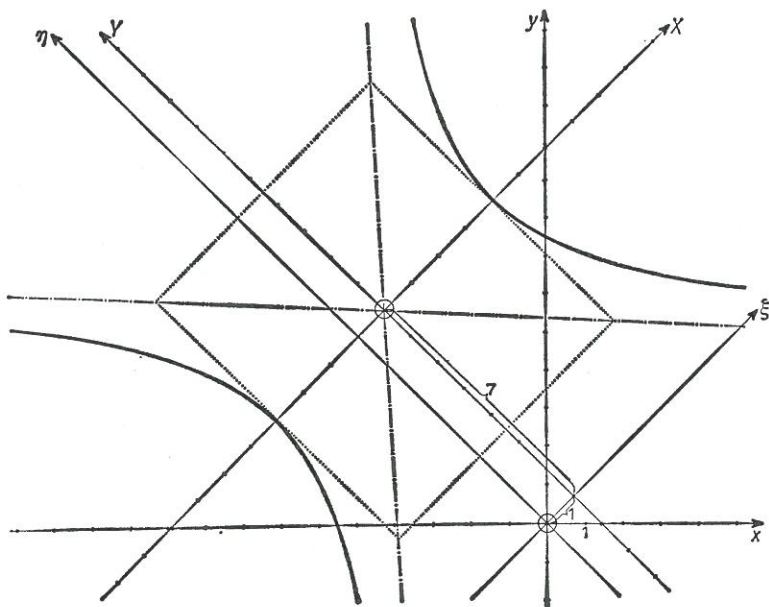
8. Markovska veriga je podana z matriko:

$$P = \begin{pmatrix} p & q \\ p_1 & q_1 \end{pmatrix}; p \neq 0, q \neq 0, p_1 \neq 0, q_1 \neq 0. \text{ Izračunaj: } P(2) = \begin{pmatrix} p' & q' \\ p'_1 & q'_1 \end{pmatrix}!$$

Kakšnim pogojem morajo zadoščati elementi prve matrike, da bodo elementi druge matrike zadoščali pogojem:

- a) $p' > p$, b) $p'_1 > p_1$, c) $q' > q$, č) $q'_1 > q_1$, d) $p' < p$, e) $p'_1 < p_1$, f) $q' < q$, g) $q'_1 < q_1$?

z) $21X^2 - 16Y^2 - 336 = 0$ hiperbola



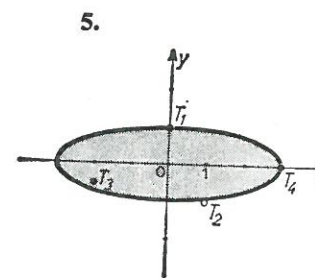
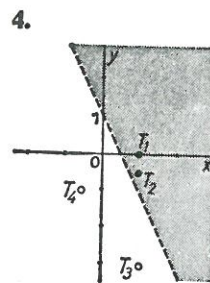
XV/5. Pregled krivulj drugega reda

1. Necentralna krivulja. Prazna množica.
2. Necentralna krivulja. Parabola.
3. Centralna krivulja. Hiperbola.
4. Centralna krivulja. Elipsa.
5. Necentralna krivulja. Vzporodnici.
6. Necentralna krivulja. Dvakrat šteta premica.
7. Centralna krivulja. Elipsa.
8. Centralna krivulja. Prazna množica.
9. Centralna krivulja. Točka.
10. Centralna krivulja. Sekajoči se premici.

XVI. KOMBINATORIKA

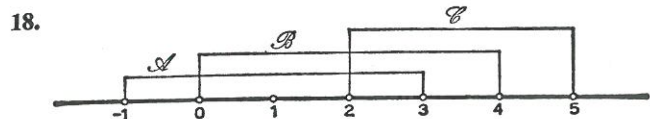
XVI/1. Algebra množic

1. a) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$; b) $\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$;
 c) $\{2^3, 2^2 \cdot 3, 2 \cdot 3^2, 3^3\} = \{8, 12, 18, 27\}$; č) $\{2, 4, 8, 16, 32\}$;
 d) $\{1, i, -i\}$
2. a) $-2/3 \in \mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{C}$; b) $\pi^2 \in \mathcal{R}, \mathcal{C}$; c) $1 \cdot \bar{1} = 10/9 \in \mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{C}$;
 č) $(\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ)^6 = -1 \in \mathcal{L}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{C}$
3. Relacija pripadnosti » \in « ni ekvivalenčna: ni povratna, ni vzajemna in v splošnem ni prehodna.
4. $T_1 \in \mathcal{M}, T_2 \in \mathcal{M}, T_3 \notin \mathcal{M}, T_4 \notin \mathcal{M}$



5. $T_1 \in \mathcal{M}, T_2 \in \mathcal{M}, T_3 \in \mathcal{M}, T_4 \in \mathcal{M}$
6. a) Slika je elipsa z goriščema A, B in z veliko osjo $2r$ in notranjost te elipse.
 b) Slika je krožnica s središčem A in s polmerom r in notranjost tega kroga.
 c) Slika je hiperbola z goriščema A, B in realno osjo $AB/2$.
 č) Slika je parabola z goriščem G in z vodnico p.
7. $\mathcal{N} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{C}$
8. a) Da; b) ne; c) da; č) da.
9. $(\mathcal{A} \subset \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \subset \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}$
10. Pravilne trditve so: a), b), c) in e).
11. $\mathcal{A} = \{-3\}, \mathcal{B} = \{-2, 5\}, \mathcal{C} = \mathcal{V}, \mathcal{D} = \{0\}$
12. $\mathcal{V}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$
13. $\mathcal{V}, \{\mathcal{V}\}, \{1\}, \{2\}, \{\{\mathcal{V}\}, 1\}, \{\{\mathcal{V}\}, 2\}, \{1, 2\}, \{\{\mathcal{V}\}, 1, 2\}$
14. $\mathcal{A}' = \mathcal{B} \cup \{1\}, \mathcal{B}' = \mathcal{A} \cup \{1\}$

15. a) $\mathcal{A}' = \{3k - 2; k \in \mathcal{N}\} \cup \{3k - 1; k \in \mathcal{N}\}$; b) $\mathcal{B}' = \mathcal{V}$
 16. a) vsi asi in križi; c) vsi križi in piki; d) vsi asi, križi in piki.
 b) pikov as; č) \mathcal{V} ;
 17. $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{6, 12, 18, 24, 30\}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \{10, 20, 30\}$, $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \{15, 30\}$,
 $\mathcal{B} \cup \mathcal{C} = \{3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 30\}$,
 $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \{30\}$



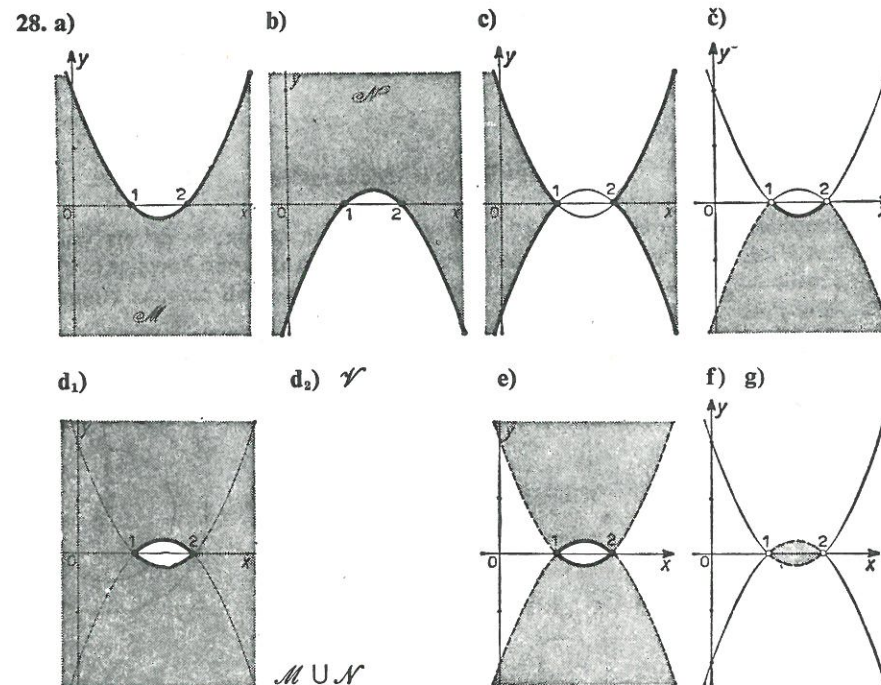
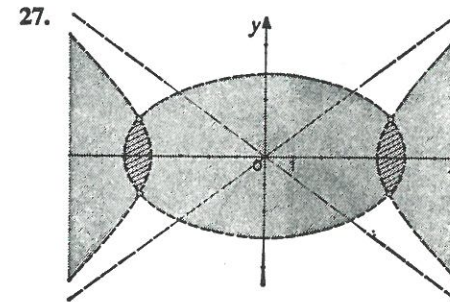
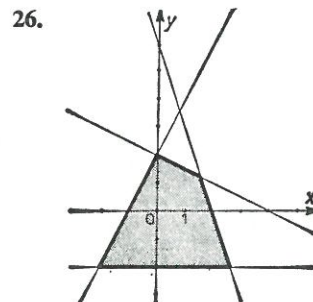
- a) $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap \mathcal{C} = (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = \{x; 2 \leq x \leq 4\}$;
 b) $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup \mathcal{C} = (\mathcal{A} \cup \mathcal{C}) \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = \{x; 0 \leq x \leq 5\}$
 19. a) $\{-2, -4, -8\} = (-2) \cup \{-4\} \cup \{-8\}$;
 b) $\{1\} = \{1, 2, 1/2\} \cap \{1, \log 42 / \log 7\}$;
 c) $\{10\} = \{10, 1/10\} \cap \{10, 100\}$
 20. $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} \cup \{3, 4\} \cup \dots \cup \{n, n+1\} \cup \dots = \mathcal{N}$
 21. a) $\mathcal{A}' = \{5, 6, 7, 8, 9\}$; 22. a) $\mathcal{A} - \mathcal{B} = \{n, r\}$;
 b) $\mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \{3, 4\}$; b) $\mathcal{B} - \mathcal{A} = \{s\}$;
 c) $(\mathcal{A} \cap \mathcal{C})' = \{0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$; c) $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) - (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \{n, r, s\}$;
 č) $\mathcal{A}' \cup \mathcal{C}' = \{0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$; č) $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) - (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \mathcal{V}$
 d) $\mathcal{B} - \mathcal{C} = \{0, 2, 8\}$
 23. a) $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})' = \mathcal{A}' \cap \mathcal{B}' = \{x; -1 < x \leq 0 \vee 5 \leq x < 6\}$;
 b) $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})' = \mathcal{A}' \cup \mathcal{B}' = \{x; -1 < x < 1 \vee 3 < x < 6\}$

24.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}
I.	F	F	F	F	F	F	K	K	K	K	K	K
II.	F	F	F	M	M	M	F	F	F	M	M	M
III.	F	K	M	F	K	M	F	K	M	F	K	M

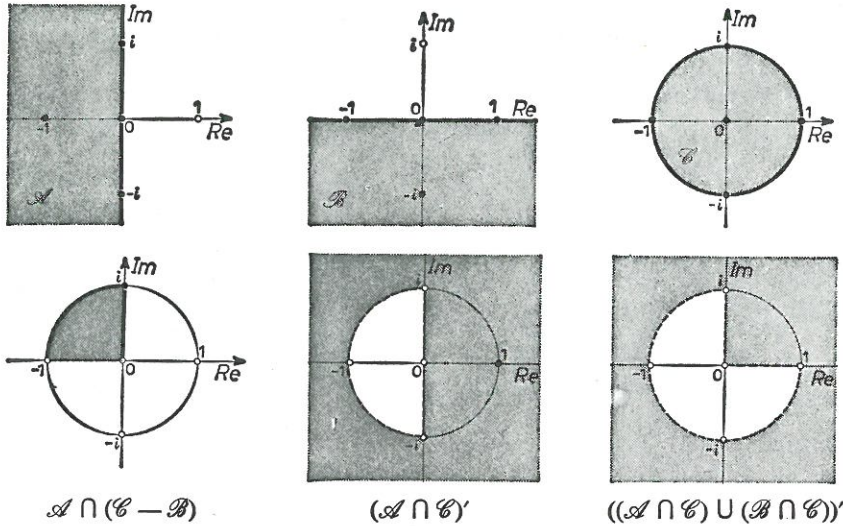
- $\mathcal{U} = \{e_1, e_2, \dots, e_{12}\}$
 a) $\mathcal{P} = \{e_6, e_{12}\}$; c) $\mathcal{R} = \{e_{11}, e_{12}\}$;
 b) $\mathcal{L} = \{e_5, e_9, e_{10}\}$; č) $\mathcal{S} = \{e_2, e_5, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$
 25. a) $\mathcal{P} \cap \mathcal{S} = \{e_{12}\}$ — v razporedih je več matematikov kot fizikov ali kemikov, vendar je vsaj en kemik;
 b) $\mathcal{P} \cup \mathcal{R} = \{e_6, e_{11}, e_{12}\}$ — v razporedih je več matematikov kot fizikov ali kemikov, ali pa v njej ni fizika;

- c) $\mathcal{Q}' = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_6, e_7, e_8, e_{11}, e_{12}\}$ — v razporedih sta vsaj dva strokovnjaka iste stroke;
 č) $\mathcal{S}' = \{e_1, e_3, e_4, e_6\}$ — v razporedih ni kemika;
 d) $\mathcal{P} - \mathcal{S} = \{e_6\}$ — v razporedih je več matematikov kot fizikov.



29. Če je $r = 0$, je presek točka S;
 če je $r > 0$, je presek krožnica $\mathcal{K}(S, r)$.

*30.



XVI/2. Preslikave in moč množice

1. Preslikava med množicama \mathcal{A} in \mathcal{B} je obratno enolična, če prireja vsakemu $a \in \mathcal{A}$ en sam $b \in \mathcal{B}$ in je obenem vsak $b \in \mathcal{B}$ slika natanko enega $a \in \mathcal{A}$. Preslikavo lahko prikažemo s prirejanjem elementov obeh množic. Napravimo lahko več preslikav, npr.:

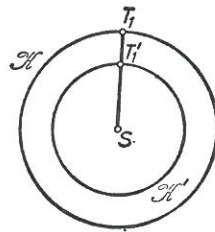


2. a) Ne;
 b) da (izvedljivo je prirejanje točk obeh krožnic); prim. sl.
 c) ne.

- *3. a) $f: n \rightarrow 3n$; b) $f: n \rightarrow -n$;
 c) $f: 0 \rightarrow 1, -n \rightarrow 2n, +n \rightarrow 2n + 1$

0,	-1,	+1,	-2,	+2,	-3,	+3,	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	...

4. a) Ni preslikava;
 b) preslikava $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$;



*c) preslikava \mathcal{A} na \mathcal{B} ali surjektivna preslikava; $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ je surjektivna preslikava, če preslika množico \mathcal{A} na vso množico \mathcal{B} (vsak element množice \mathcal{B} je slika vsaj enega elementa množice \mathcal{A}).

5. a) Ni preslikava;
 b) preslikava $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$;
 *c) injektivna preslikava $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$; $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ je injektivna preslikava, če se dva različna elementa iz množice \mathcal{A} preslikata v dva različna elementa iz množice \mathcal{B} (vsak element množice \mathcal{B} je slika kvečjemu enega elementa množice \mathcal{A}).

6. a) Ni preslikava;
 b) preslikava $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$;
 *c) obratno enolična ali bijektivna preslikava; $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ je bijektivna preslikava, če je hkrati surjektivna in injektivna.

*7. Preslikava f je surjektivna, g injektivna in h bijektivna. (Glede pojmov surjektivna, injektivna in bijektivna preslikava preuči prejšnje vaje!)

8. 1300, 505, 337, 813, 333

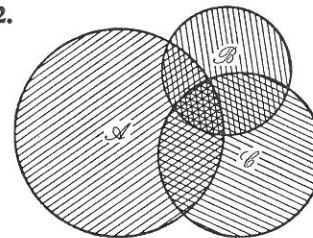
9. a) 1; b) 3, 0; c) 5; č) 3

10. a) 34;

b) literarni krožek obiskuje 14, marksistični 16, latinski 7 in nemški 13 dijakov;
 c) 11; č) 5

11. $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16, 32, 64\}$, $m(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = 13$
 $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{1, 2, 4, 8\}$, $m(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = 4$;
 $m(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) + m(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = 17 = m(\mathcal{A}) + m(\mathcal{B})$

*12.



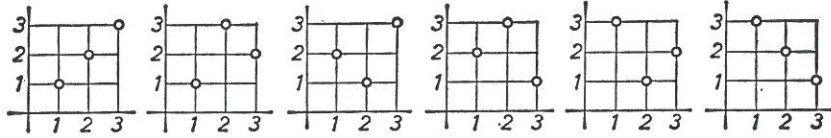
Vsoto $m(\mathcal{A}) + m(\mathcal{B}) + m(\mathcal{C})$ določajo elementi, ki so v posameznih množicah. Dvakrat so vštet elementi, ki so v dveh množicah hkrati, in trikrat elementi, ki so v vseh treh množicah. Elemente v treh presekih po dveh množicah moramo enkrat odšteti, zato pa potem niso upoštevani elementi, ki so v vseh treh množicah. Te prištejemo na kraju.

XVI/3. Permutacije končne množice

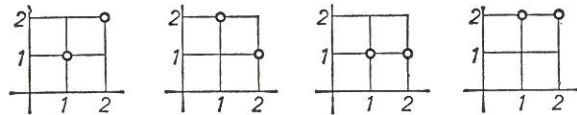
1. $(1, 2, 3), (1, 2, 3), (1, 2, 3), (1, 2, 3), (1, 2, 3), (1, 2, 3)$
 $1\ 2\ 3, 1\ 3\ 2, 2\ 1\ 3, 2\ 3\ 1, 3\ 1\ 2, 3\ 2\ 1$

Opomba: Pri oblikovanju permutacij naravnih števil pričnemo pri osnovnem razporedu, kjer so števila urejena po velikosti.

Zaradi preglednosti opuščamo vejice med elementi v posameznih razporedih.



2. a) $\begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 2, 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 2, 2 \end{pmatrix}$ c) 4



3. a) 123, 132, 213, 231, 312, 321;
112, 121, 211, 113, 131, 311,
221, 212, 122, 223, 232, 322,
331, 313, 133, 332, 323, 233,
111, 222, 333

4. a) 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432,
2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431,
3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421,
4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321

- b) AIMR, AIRM, AMIR, AMRI, ARIM, ARMI,
IAMR, IARM, IMAR, IMRA, IRAM, IRMA,
MAIR, MARI, MIAR, MIRA, MRAI, MRIA,
RAIM, RAMI, RIAM, RIMA, RMAI, RMIA,

5. a) $\begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ 2, 3, 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ 2, 3, 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \\ 1, 5, 3, 2, 4 \end{pmatrix}$ č) $\begin{pmatrix} a, b, c, d \\ a, d, c, b \end{pmatrix}$

6. a) $\begin{pmatrix} 1, 2 \\ 2, 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 5, 4, 1, 3, 6, 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} a, b, c \\ c, a, b \end{pmatrix}$ č) $\begin{pmatrix} a, b, c, d, e \\ b, c, a, e, d \end{pmatrix}$

XVI/4. Preslikave končne množice v drugo končno množico

1. a) $\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ x, x, x, x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ x, x, x, y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ x, x, y, x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ x, y, x, x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ y, x, x, x \end{pmatrix},$
 $\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ x, x, y, y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ x, y, x, y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ x, y, y, x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ y, x, x, y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ y, x, y, x \end{pmatrix},$

- $\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ y, y, x, x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ x, y, y, y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ y, x, y, y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ y, y, x, y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ y, y, y, x \end{pmatrix},$
 $\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ y, y, y, y \end{pmatrix}$

- b) $\begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 2, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 2, 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 2, 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 2, 4 \end{pmatrix},$
 $\begin{pmatrix} 1, 2 \\ 3, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 3, 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 3, 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 3, 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 4, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 4, 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 4, 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 4, 4 \end{pmatrix},$

- c) $\begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ a, a, a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ a, a, b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ a, a, c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ a, b, a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ a, b, b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ a, b, c \end{pmatrix},$
 $\begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ a, c, a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ a, c, b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ a, c, c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ b, a, a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ b, a, b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ b, a, c \end{pmatrix},$
 $\begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ b, b, a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ b, b, b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ b, b, c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ b, c, a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ b, c, b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ b, c, c \end{pmatrix},$
 $\begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ c, a, a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ c, a, b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ c, a, c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ c, b, a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ c, b, b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ c, b, c \end{pmatrix},$
 $\begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ c, c, a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ c, c, b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ c, c, c \end{pmatrix}$

2. a) 11111, 11112, 11121, 11122,
11211, 11212, 11221, 11222,
12111, 12112, 12121, 12122,
12211, 12212, 12221, 12222,
21111, 21112, 21121, 21122,
21211, 21212, 21221, 21222,
22111, 22112, 22121, 22122,
22211, 22212, 22221, 22222

- b) aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc

- c) 111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133,
211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233,
311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332, 333

14. a) $P_2 + 2P_2^2 = 4 = 2^2$
 b) $P_3 + 6P_3^2 + 3P_3^3 = 27 = 3^3$
 c) $P_4 + 12P_4^2 + 6P_4^{2,2} + 12P_4^3 + 4P_4^4 = 256 = 4^4$; $(p)V_n^n = n^n$

15. a) 80640; b) 4320; 16. a) 1728; b) 17280

17. a) 5040; b) 288; c) 720; č) 144; 18. 3600

19. 120; 20. a) 24; b) 12; c) 12

*21. Naj ima katera izmed poti od O do K natančno k korakov v diagonalni smeri ($0 \leq k \leq n$). Ta pot ima potem — glede na zahteve — še točno $n - k$ korakov v vodoravni smeri in prav toliko v navpični smeri. Ta pot ima tedaj $k + (n - k) + (n - k) = 2n - k$ korakov. Takšnih poti z natanko k »diagonalnimi« koraki je toliko, kolikor je permutacij $2n - k$ elementov, kjer je razred $p_1 = k$ enakih (»diagonalni« koraki), razred $p_2 = n - k$ enakih (»vodoravni« koraki) in razred $p_3 = n - k$ enakih (»navpični« koraki). Takšnih poti je tedaj $P_{2n-k}^{k, n-k, n-k}$. Upoštevajmo, da je lahko $k = 0, 1, 2, \dots, n$, pa dobimo, da je število vseh zelenih poti od O do K enako vsoti:

$$P_{2n-0}^{0, n-0, n-0} + P_{2n-1}^{1, n-1, n-1} + \dots + P_{2n-k}^{k, n-k, n-k} + \dots + P_{2n-n}^{n, n-n, n-n} = \\ = \sum_{k=0}^n (2n - k)! / (k! ((n - k)!)^2).$$

22. Denimo, da je danih n^2 elementov, med njimi je n skupin po n med seboj enakih. Število vseh permutacij te dane množice je enako naravnemu številu $(n^2)! / (n!)^n$.
23. Če združimo v prvem oklepaju prvi in zadnji člen, drugi in predzadnji člen itd., je razvidno, da se pri množenju z $(n - 1)!$ imenovalci okrajšajo.

XVI/7. Podmnožice končne množice

1. $\{a, b, c\}$, $\{a, b, \alpha\}$, $\{a, b, \beta\}$, $\{a, b, \gamma\}$,
 $\{a, c, \alpha\}$, $\{a, c, \beta\}$, $\{a, c, \gamma\}$,
 $\{a, \alpha, \beta\}$, $\{a, \alpha, \gamma\}$, $\{a, \beta, \gamma\}$,
 $\{b, c, \alpha\}$, $\{b, c, \beta\}$, $\{b, c, \gamma\}$,
 $\{b, \alpha, \beta\}$, $\{b, \alpha, \gamma\}$, $\{b, \beta, \gamma\}$,
 $\{c, \alpha, \beta\}$, $\{c, \alpha, \gamma\}$, $\{c, \beta, \gamma\}$,
 $\{a, \beta, \gamma\}$
2. a) 2, 7;
 b) 4;
 c) 4;
 č) 7

3. 105; 4. a) 35; b) 18; c) 5

Opomba: Za presojanje različnih izvlečenj si lahko mislimo kroglice oštevilčene.

5. 6; 6. $45 \binom{2}{n}$; 7. C_n^2 ; 8. $2C_{2n}^2 + 2C_{2n}^1$; 9. C_n^3
 10. C_n^3 ; 11. 126; 12. 15; 13. $C_n^2 - C_m^2$; 14. $C_n^2 - C_m^2 + 1$

15. V C_n^4 točkah: vsakemu presečišču dveh diagonal lahko priredimo četverkotnik, ki ima za oglišča krajišča teh dveh diagonal. Število vseh presečišč diagonal konveksnega n -kotnika je enako številu četverkotnikov, ki jih določa n oglišč mnogokotnika.

16. 299 (všet je nepreluknjani stolpec)

17. a) 105; b) 70; c) 30; 18. 970; 19. a) 15; b) 6; c) 12

20. a) Na $(C_8^5)^2 = 3136$ načinov. Upoštevaj, da označujemo položaje figur na šahovnici z dvema koordinatama!

b) Na $5! \cdot (C_8^5)^2 = 376320$ načinov.

21. Izmed n elementov lahko izberemo m_1 elementov za prvi predalček na $C_n^{m_1}$ načinov, nato pa iz drugih $n - m_1$ elementov za drugi predalček m_2 elementov na $C_{n-m_1}^{m_2}$ načinov, itd. Število porazdelitev dobimo po osnovnem izreku kombinatorike kot produkt $C_n^{m_1} \cdot C_{n-m_1}^{m_2} \dots = n! / (m_1! m_2! \dots m_k!)$. Rezultat lahko dobiš tudi z uporabo permutacij!

22. Število urejenih porazdelitev je $n! / ((m!)^k)$, če pa vrstnega reda predalčkov ne upoštevamo, je takih neurejenih porazdelitev $n! / ((m!)^k \cdot k!)$.

23. Navodilo: Oblikuj k nalogi pripravno besedilo! Rešitev naj bo dani izraz! Primerjaj z vajo 22!

24. Na k^n načinov; 8: — | 1, 2, 3;

1 | 2, 3; 2 | 1, 3; 3 | 1, 2;
 1, 2 | 3; 1, 3 | 2; 2, 3 | 1;
 1, 2, 3 | —

25. a) 6435; b) 630630; 26. 4200

27. 30;

28. a) $24! / ((6!)^4)$; b) $24! / ((4!)^6)$

29. 1680;

30. a) 90; b) 15

31. Poglejmo tole enakost: $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10$. Če opustimo na levi strani tri znake $+$ in jih nadomestimo z vejicami, dobimo na primer vsote 1, $1 + 1 + 1$, $1 + 1 + 1 + 1 + 1$, $1 + 1$, tedaj eno od rešitev dane enačbe in sicer 1, 3, 4, 2. Vidno je, da ima naša enačba v naravnih številih toliko rešitev, na kolikor načinov lahko iz devetih znakov $+$ izberemo tri znake $+$. Teh je $\binom{9}{3} = 84$.

32. Ideja rešitve je podrobno opisana v prejšnji vaji. Vseh rešitev je potemtakem toliko, na kolikor načinov lahko iz $n - 1$ znakov $+$ izberemo $r - 1$ znakov $+$, torej $\binom{n-1}{r-1}$.

33. V dano enačbo vstavimo $x = a + 4$, $y = b + 5$, $z = c + 6$, $v = d + 7$, pa dobimo enačbo $a + b + c + d = 6$, ki ima $\binom{5}{3} = 10$ rešitev.

XVI/8. Binomski izrek

1. a) $32a^5 - 80a^4 + 80a^3 - 40a^2 + 10a - 1$

b) $x^4/81 + 4x^2/9 + 6 + 36/x^2 + 81/x^4$

c) $a^3b^3 - 3a^2b^2c^2 + 3abc^4 - c^6$

č) $1 + 4\sqrt{x} + 6x + 4x\sqrt{x} + x^2$

d) $x^3 - 6x^2\sqrt{xy} + 15x^2y - 20xy\sqrt{xy} + 15xy^2 - 6y^2\sqrt{xy} + y^3$

e) $1 + 5a^x + 10a^{2x} + 10a^{3x} + 5a^{4x} + a^{5x}$

f) $e^{4x} + e^{-4x} + 4(e^{2x} + e^{-2x}) + 6$

2. a) 198; b) -76; c) $8a^3 + 8a$; č) $60\sqrt{3}$

3. a) $210x^{12}y^8$; b) $10a^2b\sqrt{b}$; c) $-715/x^5$; č) $-126a^2\sqrt{a}$; d) $28a^{10}/b^2$;

e) $\binom{n}{k-1} a^{n-k+1} \cdot b^{k-1}$

4. a) $r = 3 \Rightarrow \binom{8}{r} (2a^2)^{8-r} (-b)^r = -1792a^{10}b^3$

b) $r = 4 \Rightarrow \binom{7}{r} (3xy^2)^{7-r} z^{3r} = 945x^3y^6z^{12}$

5. a) 1*1040808032; b) 1*006015020015006001;

c) 0*912673; č) 96059601

6. Upoštevaj: iz $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ in $\binom{n}{0} = 1$ sledi $0! = 1$

$$(x + y + z)^3 = \sum_{r_1! r_2! r_3!} \frac{3!}{r_1! r_2! r_3!} x^{r_1} y^{r_2} z^{r_3} =$$

$$= \frac{3!}{3!0!0!} x^3 y^0 z^0 + \frac{3!}{2!1!0!} x^2 y^1 z^0 + \frac{3!}{2!0!1!} x^2 y^0 z^1 + \frac{3!}{1!2!0!} x^1 y^2 z^0 +$$

$$+ \frac{3!}{1!1!1!} x^1 y^1 z^1 + \frac{3!}{1!0!2!} x^1 y^0 z^2 + \frac{3!}{0!3!0!} x^0 y^3 z^0 + \frac{3!}{0!2!1!} x^0 y^2 z^1 +$$

$$+ \frac{3!}{0!1!2!} x^0 y^1 z^2 + \frac{3!}{0!0!3!} x^0 y^0 z^3 =$$

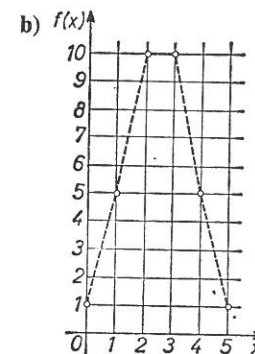
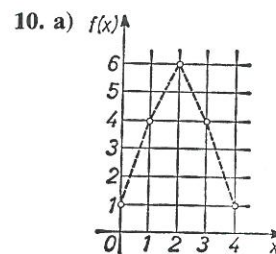
$$= x^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 6xyz + 3xz^2 + y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$$

7. a) $r_1 = 3, r_2 = 2, r_3 = 1 \Rightarrow \frac{6!}{r_1! r_2! r_3!} (2a^3)^{r_1} (-3ab^2)^{r_2} c^{r_3} = 4320a^{11}b^4c$

b) $r_1 = 3, r_2 = 1, r_3 = 1 \Rightarrow \frac{5!}{r_1! r_2! r_3!} (xy)^{r_1} (-y^2)^{r_2} z^{3r_3} = -20x^3y^5z^3$

8. 3420

9. Navodilo: Če je $u \neq 0$, vstavimo v dano enakost $u = v^{-1}$ in pomnožimo obe strani enakosti z izrazom v^{2n} . Če primerjamo koeficiente v obeh polinomih, dobimo zelene zveze.



11. Na 2^n načinov: $\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^n$

12. $1190 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17 = 1 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^4 = 16$

13. $C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 2^5 - 1 = 31$

14. $C_8^1 + C_8^2 + \dots + C_8^8 = 2^8 - 1 = 255$

15. $2^{11} - 1 - C_{11}^1 - C_{11}^2 = 1981$

16. Želeni formuli dobimo iz binomskih razvojev

$$(1 + 1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$(1 - 1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^k \binom{n}{k} + \dots = 0,$$

če najprej enakost seštejemo, drugič pa odštejemo.

17. $k \binom{m}{k} = k \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1 \cdot 2 \dots (k-1) \cdot k} =$
 $= m \frac{(m-1)\dots(m-1-(k-1)+1)}{1 \cdot 2 \dots (k-1)} = m \binom{m-1}{k-1}$

18. Ker velja $k \binom{m}{k} = m \binom{m-1}{k-1}$, je dana vsota enaka

$$\begin{aligned} & 8 \left(2 \binom{2n}{2} + 4 \binom{2n}{4} + \dots + (2n-2) \binom{2n}{2n-2} + 2n \binom{2n}{2n} \right) = \\ & = 8 \left(2n \binom{2n-1}{1} + 2n \binom{2n-1}{3} + \dots + 2n \binom{2n-1}{2n-3} + 2n \binom{2n-1}{2n-1} \right) = \\ & = 16n \left(\binom{2n-1}{1} + \binom{2n-1}{3} + \dots + \binom{2n-1}{2n-3} + \binom{2n-1}{2n-1} \right) \end{aligned}$$

Izraz v oklepaju pa je enak 2^{2n-2} in je zato prejšnja vsota enaka $16n \cdot 2^{2n-2} = n \cdot 2^{2n+2}$.

19. Predpostavimo, da je $a^p - 1 = mp$. Zaradi binomskega izreka je $a^p - 1 = (a-1)^p + \binom{p}{1} a^{p-1} - \binom{p}{2} a^{p-2} + \dots - \binom{p}{p-1} a$. Ker je vedno $\binom{p}{r}$ večkratnik števila p , sledi, da je tudi $(a-1)^p$ večkratnik števila p in zato tudi $a-1$. Zaradi

$$\begin{aligned} a^p - 1 &= (a-1)(a^{p-1} + \dots + a + 1) = \\ &= (a-1)((a^{p-1}-1) + (a^{p-2}-1) + \dots + (a-1) + 1) \end{aligned}$$

sledi naša trditev, kajti vsak izraz

$$a^k - 1 = (a-1)(a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + a + 1), \text{ kjer je } k \leq p-1, \text{ je deljiv s praštevilom } p.$$

20. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \binom{n+1}{2} = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

21. $\cos n\varphi = \cos^n \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \dots$

$$\sin n\varphi = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \varphi \sin^5 \varphi - \dots$$

22. Navodilo: V izraz $(1+x)^{4n}$ vstavi $x=i$ in razvij po binomskem izreku!

23. Navodilo: Izračunaj zaporedne odvode polinoma

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$$

in potem postavi v enakosti $x=1$!

24. Izraz $\binom{2n}{n}$ pomeni, na koliko načinov lahko izberemo iz množice, ki ima $2n$ elementov, n elementov. Ta izbor lahko naredimo tudi takole: izberemo k elementov ($0 \leq k \leq n$) iz podmnožice n elementov in hkrati izberemo $n-k$ elementov iz druge podmnožice, ki ima n elementov. Teh načinov izbire je $\binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$.

Ker je lahko k poljubno naravno število, ki ustreza pogoju $0 \leq k \leq n$, je mogoče zapisati zvezo $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$, kar je bilo treba dokazati.

25. Navodilo: Primerjaj med seboj koeficiente na obeh straneh binomskega razvoja!

XVII. VERJETNOSTNI RAČUN

XVII/1. Dogodki in algebra dogodkov

1. a)

e	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
I	xy	-	-	x	x	-	-	y	y
II	-	xy	-	y	-	x	y	x	-
III	-	-	xy	-	y	y	x	-	x

b) $n=9=3^2$; c) $N=2^9=512$; č) $\mathcal{A} = \{e_2, e_3, e_6, e_7\}$; d) $\mathcal{B} = \{e_4, e_6, e_7, e_8\}$; e) $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_8, e_9\}$; f) $\mathcal{D} = \{e_1\}$; g) $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{e_2, e_3, e_4, e_6, e_7, e_8\}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{e_6, e_7\}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\} = \mathcal{U} = \text{gotov dogodek}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{D} = \mathcal{V} = \text{nemogoč dogodek}$, $\mathcal{A}' = \{e_1, e_4, e_5, e_8, e_9\}$; h) $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$

2. a) $n=8$;

e	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
I	xyz	xy	xz	yz	x	y	z	-
II	-	z	y	x	yz	zx	xy	xyz

b) $\mathcal{A} = \{\text{v prvem predalu je natanko ena krogla}\} = \{e_5, e_6, e_7\}$,
 $\mathcal{B} = \{\text{v drugem predalu je krogla } x\} = \{e_4, e_6, e_7, e_8\}$;

c) $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{e_6, e_7\}$

3. a) $n=6, N=2^6=64$;

e	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
I	xx	-	-	x	x	-
II	-	xx	-	x	-	x
III	-	-	xx	-	x	x

c) $\mathcal{A} = \{e_2, e_3, e_6\}$; č) $\mathcal{B} = \{e_4, e_6\}$; d) $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$;

e) $\mathcal{D} = \{e_1\}$; f) $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{e_2, e_3, e_4, e_6\}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{e_6\}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} = \mathcal{U}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{D} = \mathcal{V}$, $\mathcal{A}' = \{e_1, e_4, e_5\}$; g) $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$

4. a) $n=4$;

e	e_1	e_2	e_3	e_4
I	xxx	xx	x	-
II	-	x	xx	xxx

b) $\mathcal{A} = \{\text{v prvem predalu je vsaj ena krogla}\} = \{e_1, e_2, e_3\}$,
 $\mathcal{B} = \{\text{v drugem predalu je vsaj ena krogla}\} = \{e_2, e_3, e_4\}$;
c) $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \mathcal{U}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{e_2, e_3\}$

7. a) $\mathcal{A} = \{e_1, e_4\}$, $\mathcal{B} = \{e_2, e_3\}$;

e_1	e_2	e_3	e_4
GG	GŠ	ŠG	ŠŠ

b) $\{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_2, e_3\}, \{e_2, e_4\}, \{e_3, e_4\}, \{e_1, e_2, e_3\}, \{e_1, e_2, e_4\}, \{e_1, e_3, e_4\}, \{e_2, e_3, e_4\}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \mathcal{U}, \mathcal{V}$

6.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
GGG	GGŠ	GŠG	ŠGG	GŠŠ	ŠGG	ŠŠG	ŠŠŠ

$\mathcal{A} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $\mathcal{B} = \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$,
 $\mathcal{C} = \{e_2, e_5, e_6, e_8\}$, $\mathcal{D} = \{e_1, e_2, e_4, e_5, e_7, e_8\}$, $\mathcal{E} = \{e_3, e_6\}$,
 $\mathcal{F} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

7. $\mathcal{U} = \{p_1p_2, p_1q_2, q_1p_2, q_1q_2\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $\mathcal{A} = \{e_3, e_4\}$,
 $\mathcal{B} = \{e_1, e_4\}$, $\mathcal{C} = \{e_2, e_3\}$, $\mathcal{D} = \{e_1, e_2, e_3\}$

8. a)

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
12	13	14	23	24	34

 b) $\mathcal{A} = \{e_2\}$, $\mathcal{B} = \{e_5\}$

9. a)

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
12	13	14	15	21	23	24	25	31	32	34	35	41	42	43	45	51	52	53	54

b) $\mathcal{A} = \{e_7, e_{14}\}$

10. a)

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
11	12	13	14	21	22	23	24	31	32	33	34	41	42	43	44

b) $\mathcal{A} = \{e_1, e_3, e_9, e_{11}\}$, $\mathcal{B} = \{e_6, e_8, e_{14}, e_{16}\}$

11. a) $n = 8^6$; b) $N = 2^{8^6}$ 12. a) $n = p^r$; b) $N = 2^{p^r}$

13. $\mathcal{M}' = \{\text{izbrali smo ženskega prebivalca}\}$, $\mathcal{P}' = \{\text{izbrali smo nepolnoletnega prebivalca}\}$,
 $\mathcal{M} \cup \mathcal{P} = \{\text{izbrali smo moškega ali pa polnoletno žensko}\}$,
 $\mathcal{M} \cap \mathcal{P} = \{\text{izbrali smo polnoletnega moškega}\}$, $\mathcal{M} \cap \mathcal{P}' = \{\text{izbrali smo nepolnoletnega moškega}\}$,
 $\mathcal{M}' \cap \mathcal{P}' = \{\text{izbrali smo nepolnoletno žensko}\}$

14. a) $\mathcal{X} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}' \cap \mathcal{C}'$; b) $\mathcal{Y} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$; c) $\mathcal{Z} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$;
č) $\mathcal{W} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}'$

XVII/2. Verjetnost dogodka in aksiomi verjetnostnega računa

V rešitvah tega poglavja pomeni n število elementarnih dogodkov, m število ugodnih elementarnih dogodkov za neki dogodek, P pa verjetnost tega dogodka.

1. $n = 10$, a) $m = 3$, $P = 0.3$; b) $m = 5$, $P = 0.5$

2. $n = 9$, a) $m = 5$, $P = 5/9$; b) $m = 2$, $P = 2/9$

3. $n = 30$, a) $m = 5$, $P = 1/6$; b) $m = 25$, $P = 5/6$

4. $n = 1000$, a) $m = 90$, $P = 0.09$; b) $m = 20$, $P = 0.02$; c) $m = 125$, $P = 0.125$

5. $n = 1000$, a) $m = 200$, $P = 0.2$; b) $m = 800$, $P = 0.8$; c) $m = 700$, $P = 0.7$

6. $n = \binom{10}{5}$, $m = \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{1}{1}$, $P = 5/21$

7. $n = \binom{20}{4}$, a) $m = \binom{5}{1}^4$, $P = 125/969$; b) $m = \binom{10}{4}$, $P = 14/323$; c) $m = \binom{15}{4}$, $P = 91/323$

8. $n = \binom{5}{3}$, $m = 1$, $P = 0.1$

9. Točne vrednosti so: $P(\mathcal{A}) = 0.5$, $P(\mathcal{B}) = 0.25$ in $P(\mathcal{C}) = 0.125$. S poskusom dobljeni približki statističnih verjetnosti se bodo zelo verjetno od zgoraj navedenih vrednosti nekoliko razlikovali.

10. $n = \binom{60}{2}$, $m = \binom{50}{2}$, $P = 0.69$

11. $n = \binom{30}{2}$, $m = 29$, $P = 1/15$

12. $n = \binom{100}{3}$, $m = \binom{9}{1} \cdot \binom{91}{2}$, $P = 351/1540$

13. $n = \binom{5}{2}$, a) $m = \binom{4}{2}$, $P = 1/6$; b) $m = \binom{5}{2}$, $P = 5/18$; c) $m = \binom{4}{1} \cdot \binom{5}{1}$, $P = 5/9$

14. $n = \binom{90}{5}$, $m = \binom{88}{3}$, $P = 2/801$

15. $n = \binom{32}{4}$, a) $m = \binom{16}{2}^2$, $P = 360/899$; b) $m = \binom{8}{1}^4$, $P = 512/4495$

16. $n = \binom{32}{8}$, $m = \binom{8}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{8}{1} \cdot \binom{8}{1}$, $P = 6272/525915$

17. $n = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, $m = 1$, $P = 1/24$

18. $n = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$, $m = 3! = 6$, $P = 0.1$

19. $n = 6^2 = 36$, $m = 8$, $P = 2/9$

20. $n = 6^3 = 216$, $m = 5 \cdot 3!/2! = 15$, $P = 5/72$

21. $n = 6^3 = 216$, a) $m = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$, $P = 5/9$; b) $m = 3!/2! = 3$, $P = 1/72$; c) $m = 6$, $P = 1/36$; č) $m = 16$, $P = 2/27$; d) $m = 10$, $P = 5/108$

22. $n = 6^3 = 216$, $m = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$, $P = 5/18$

23. $n = 2^3 = 8$, $m = 3!/2! = 3$, $P = 3/8$

24. $n = \binom{10}{6}$,

$\mathcal{A} = \{\text{med 6 izdelki ni defektnega}\}$, $m = \binom{7}{6}$, $P(\mathcal{A}) = 7/210$;

$\mathcal{B} = \{\text{med 6 izdelki je eden defektan}\}$, $m = 3 \cdot \binom{7}{5}$, $P(\mathcal{B}) = 63/210$;

$\mathcal{C} = \{\text{med 6 izdelki sta dva defektna}\}$, $m = \binom{3}{2} \cdot \binom{7}{4}$, $P(\mathcal{C}) = 105/210$;

$\mathcal{D} = \{\text{med 6 izdelki so trije defektni}\}$, $m = \binom{7}{3}$, $P(\mathcal{D}) = 35/210$.

Najverjetneje je, da bosta med 6 izbranimi izdelki 2 defektna.

25. $n = \binom{r}{s}$, $m = \binom{r-k}{s-l} \cdot \binom{k}{l}$, $P = \binom{r-k}{s-l} \cdot \binom{k}{l} / \binom{r}{s}$

26. $n = 36$, vse različne vsote so: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, $m_2 = 1$, $m_3 = 2$, $m_4 = 3$, $m_5 = 4$, $m_6 = 5$, $m_7 = 6$, $m_8 = 5$, $m_9 = 4$, $m_{10} = 3$, $m_{11} = 2$, $m_{12} = 1$. Najmanjšo verjetnost imata vsoti 2 in 12, t. j. $1/36$, največjo pa vsota 7, t. j. $1/6$.

27. $n = \binom{2r}{r}$,

$\mathcal{A} = \{\text{dve najmočnejši društvi sta v različnih skupinah}\}$,

$\mathcal{B} = \{\text{dve najmočnejši društvi sta v isti skupini}\}$,

$m(\mathcal{A}) = \binom{2r-2}{r-1} \cdot 2$, $m(\mathcal{B}) = \binom{2r-2}{r-2} \cdot 2 \Rightarrow P(\mathcal{A}) = r/(2r-1)$,

$P(\mathcal{B}) = (r-1)/(2r-1)$

Verjetnost, da se bosta najmočnejši društvi znašli v različnih skupinah, je nekoliko večja od verjetnosti, da se bosta znašli v isti.

28. Naj bo slučajno izbrano celo število $x = \dots cba = a + 10b + 100c + \dots \Rightarrow x^2 = a^2 + 20b + \dots$; o zadnji cifri v x^2 odloča le a . $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \mathcal{U}$, $n = 10$, $\mathcal{A} = \{\text{kvaadrat slučajno izbranega števila se končuje na 1}\} = \{1, 9\}$, $m = 2$, $P(\mathcal{A}) = 0.2$.

29. a) Elementarnih dogodkov je 2^n , ugodnih dogodkov je $\binom{n}{m}$, $P = \binom{n}{m} \cdot 2^{-n}$;

b) $P = \binom{10}{m} \cdot 2^{-10}$ je največ za $m = 5$. Najverjetnejša lega točke po desetih skokih je slika števila 5.

30. $n = \binom{N}{1} + \binom{N}{2} + \dots + \binom{N}{N}$, a) $m = \binom{N}{1} + \binom{N}{3} + \dots$, $P = 2^{N-1}/(2^N - 1)$;

b) $m = \binom{N}{2} + \binom{N}{4} + \dots$, $P = (2^{N-1} - 1)/(2^N - 1)$

Navodilo: glej nalogo 16 poglavja XVI/8!

31. $\mathcal{A} = \{\text{vezje I prevaja električni tok}\}$, $n = 2^4$, $m(\mathcal{A}) = 7$, $P(\mathcal{A}) = 7/16$;
 $\mathcal{B} = \{\text{vezje II prevaja električni tok}\}$, $n = 2^4$, $m(\mathcal{B}) = 3$, $P(\mathcal{B}) = 3/16$
 $P(\mathcal{A}) > P(\mathcal{B})$, zanesliveje prevaja tok vezje I.

32. $\mathcal{A} = \{\text{vezje I prevaja električni tok}\}$, $n = 2^6$, $m(\mathcal{A}) = 15$, $P(\mathcal{A}) = 15/64$;
 $\mathcal{B} = \{\text{vezje II prevaja električni tok}\}$, $n = 2^6$, $m(\mathcal{B}) = 21$, $P(\mathcal{B}) = 21/64$
 $P(\mathcal{B}) > P(\mathcal{A})$, zanesljiveje prevaja tok vezje II.

XVII/3. Preproste posledice aksiomov

1. $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_k = \mathcal{V}$ za $i \neq k \Rightarrow P(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4) = P(\mathcal{A}_1) + P(\mathcal{A}_2) + P(\mathcal{A}_3) + P(\mathcal{A}_4) = 0.030$

2. $\mathcal{A} = \{\text{vsi izbrani elementi so normalni}\}$, $\mathcal{B} = \{\text{med izbranimi elementi je eden defekten}\}$, $\mathcal{C} = \{\text{med izbranimi elementi ni defektnih več kot eden}\}$,
 $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{V}$, $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \Rightarrow P(\mathcal{C}) = P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B}) = \binom{8}{3}/\binom{10}{3} + \binom{3}{2} \cdot 2/\binom{10}{3} = 0.67$

3. $\mathcal{A} = \{\text{med 50 slučajno izbranimi izdelki ni defektnega}\}$,
 $\mathcal{B} = \{\text{med 50 slučajno izbranimi izdelki je samo 1 defekten}\}$,
 $\mathcal{C} = \{\text{kontrolor izdelke sprejme}\}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{V}$, $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \Rightarrow P(\mathcal{C}) = P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B}) = \binom{95}{50}/\binom{100}{50} + \binom{25}{49} \cdot 5/\binom{100}{50} = 0.18$

4. a) $\mathcal{A} = \{\text{izvlečena karta je as}\}$, $\mathcal{B} = \{\text{izvlečena karta je sedmica}\}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{\text{izvlečena karta je as ali sedmica}\}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{V} \Rightarrow P(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B}) = 4/32 + 4/32 = 1/4$;

b) $\mathcal{A} = \{\text{izvlečena karta je srčna karta}\}$, $\mathcal{B} = \{\text{izvlečena karta je dama}\}$,
 $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{\text{izvlečena karta je srčna dama}\}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{\text{izvlečena karta je srčna karta ali dama}\}$, $P(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B}) - P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = 8/32 + 4/32 - 1/32 = 11/32$

5. $\mathcal{A} = \{\text{izvlečeno število je deljivo z 2}\}$, $\mathcal{B} = \{\text{izvlečeno število je deljivo s 3}\}$,
 $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{\text{izvlečeno število je deljivo s 6}\}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{\text{izvlečeno število je deljivo z 2 ali 3}\}$, $P(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B}) - P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = 15/30 + 10/30 - 5/30 = 2/3$

6. $\mathcal{A} = \{\text{med izbranimi elementoma ni nobeden defekten}\}$,
 $\mathcal{A}' = \{\text{med izbranimi elementoma je vsaj eden defekten}\}$,
 $P(\mathcal{A}') = 1 - P(\mathcal{A}) = 1 - 1/\binom{12}{2} = 0.98$

7. $\mathcal{A} = \{\text{izvlečeno število je deljivo s 7}\}$, $\mathcal{A}' = \{\text{izvlečeno število ni deljivo s 7}\}$,
 $P(\mathcal{A}') = 1 - P(\mathcal{A}) = 1 - 14/100 = 0.86$

8. $\mathcal{A} = \{\text{nobena izvlečena krogla ni rdeča}\}$, $\mathcal{A}' = \{\text{vsaj ena izvlečena krogla je rdeča}\}$, $P(\mathcal{A}') = 1 - P(\mathcal{A}) = 1 - \binom{3}{3}/\binom{10}{3} = 17/24$

9. $\mathcal{A} = \{\text{izbrana srečka zadene 5000 din}\}$, $\mathcal{B} = \{\text{izbrana srečka zadene 1000 din}\}$,
 $\mathcal{C} = \{\text{izbrana srečka zadene 200 din}\}$, $\mathcal{D} = \{\text{izbrana srečka zadene } \geq 200 \text{ din}\}$,
 $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \mathcal{V}$, $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \Rightarrow P(\mathcal{D}) = P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B}) + P(\mathcal{C}) = 0.001 + 0.01 + 0.050 = 0.061$

10. $\mathcal{A} = \{\text{tarče ne zadenem}\}$, $\mathcal{A}' = \{\text{tarčo zadenem}\}$, $\mathcal{A}_1 = \{\text{tarčo zadenem v I. področje}\}$, $\mathcal{A}_2 = \{\text{tarčo zadenem v II. področje}\}$, $\mathcal{A}_3 = \{\text{tarčo zadenem v III. področje}\}$, $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_k = \mathcal{V}$ za $i \neq k$, $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \Rightarrow P(\mathcal{A}') = P(\mathcal{A}_1) + P(\mathcal{A}_2) + P(\mathcal{A}_3)$ in $P(\mathcal{A}) = 1 - P(\mathcal{A}') = 1 - P(\mathcal{A}_1) - P(\mathcal{A}_2) - P(\mathcal{A}_3) = 0.45$

11. a) $\mathcal{A} = \{\text{obe dekleti imata modre oči}\}$, $P(\mathcal{A}) = \binom{2}{2}/\binom{12}{2} = 1/22$;

b) $\mathcal{B} = \{\text{nobena nima modrih oči}\}$, $P(\mathcal{B}) = \binom{9}{2}/\binom{12}{2} = 6/11$;

c) $\mathcal{C} = \{\text{vsaj ena ima modre oči}\} = \mathcal{B}'$, $P(\mathcal{C}) = 1 - P(\mathcal{B}) = 5/11$

12. $\mathcal{A}_1 = \{\text{potegnemo natanko 2 asa}\}$, $\mathcal{A}_2 = \{\text{potegnemo natanko 3 ase}\}$, $\mathcal{A}_3 = \{\text{potegnemo 4 ase}\}$, $\mathcal{A} = \{\text{potegnemo vsaj 2 asa}\}$, $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_k = \mathcal{V}$ za $i \neq k$,
 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \Rightarrow P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A}_1) + P(\mathcal{A}_2) + P(\mathcal{A}_3) = \binom{4}{2} \cdot \binom{28}{2}/\binom{32}{4} + \binom{4}{3} \cdot \binom{28}{1}/\binom{32}{4} + \binom{4}{4}/\binom{32}{4} = 2381/35960$ ali pa:

$\mathcal{B}_1 = \{\text{ne potegnemo asa}\}$, $\mathcal{B}_2 = \{\text{potegnemo natanko en asa}\}$, $\mathcal{B} = \{\text{potegnemo manj kot 2 asa}\}$, $\mathcal{A} = \{\text{potegnemo vsaj 2 asa}\} = \mathcal{B}'$, $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \mathcal{V}$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \Rightarrow P(\mathcal{B}) = P(\mathcal{B}_1) + P(\mathcal{B}_2)$, $P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{B}') = 1 - P(\mathcal{B}) = 1 - P(\mathcal{B}_1) - P(\mathcal{B}_2) = 1 - \binom{28}{4}/\binom{32}{4} - \binom{4}{1} \cdot \binom{28}{3}/\binom{32}{4} = 2381/35960$

13. $P(\mathcal{B}) + P(\mathcal{B}') = 1 \Rightarrow P(\mathcal{B}) = 3/4$

$P(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) + P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B}) \Rightarrow P(\mathcal{A}) = 1/3$

*14. $P(\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = P(\mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})) = P(\mathcal{A} \cup \mathcal{D}) = P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{D}) - P(\mathcal{A} \cap \mathcal{D})$;

$\mathcal{D} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \Rightarrow P(\mathcal{D}) = P(\mathcal{B}) + P(\mathcal{C}) - P(\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$;

$\mathcal{A} \cap \mathcal{D} = \mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) \Rightarrow P(\mathcal{A} \cap \mathcal{D}) = P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) + P(\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) - P((\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \cap \mathcal{C})) = P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) + P(\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) - P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C})$;

$P(\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B}) + P(\mathcal{C}) - P(\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) - P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) - P(\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) + P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C})$

XVII/4. Pogojna verjetnost in neodvisni dogodki

1. $\mathcal{A} = \{\text{pri drugem vlečenju potegnesh kroglo št. 3}\}$, $\mathcal{B} = \{\text{pri prvem vlečenju potegnesh kroglo št. 1}\}$, $P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = 1/(n(n-1))$, $P(\mathcal{A}) = 1/n$, $P(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})/P(\mathcal{A}) = 1/(n-1)$

2. $\mathcal{A} = \{\text{obe izvlečeni krogli sta beli}\}$, $\mathcal{A}_1 = \{\text{prva izvlečena krogla je bela}\}$, $\mathcal{A}_2 = \{\text{druga izvlečena krogla je bela}\}$.

a) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$, $P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A}_1) \cdot P(\mathcal{A}_2) = (2/5)^2 = 0.16$, saj sta dogodka neodvisna,

b) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$, $P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A}_1) \cdot P(\mathcal{A}_2|\mathcal{A}_1) = 0.1$

3. $\mathcal{A} = \{\text{zapored izvlečemo belo, modro in črno kroglo}\}$, $\mathcal{A}_1 = \{\text{prvič izvlečemo belo kroglo}\}$, $\mathcal{A}_2 = \{\text{drugič izvlečemo modro kroglo}\}$, $\mathcal{A}_3 = \{\text{tretjič izvlečemo črno kroglo}\}$.

a) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ so neodvisni dogodki, $P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A}_1) \cdot P(\mathcal{A}_2) \cdot P(\mathcal{A}_3) = 7/15 \cdot 5/15 \cdot 3/15 = 7/225$;

b) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3$, $P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A}_1) \cdot P(\mathcal{A}_2|\mathcal{A}_1) \cdot P(\mathcal{A}_3|\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2) = 7/15 \cdot 5/14 \cdot 3/13 = 1/26$

4. $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ naj pomenijo dogodke, da smo pri prvem oziroma drugem vlečenju izvlekli črno, modro, zeleno, rdečo kroglo. Dogodki so med seboj neodvisni.

$\mathcal{A} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$, $P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{L}_1) \cdot P(\mathcal{L}_2) = (30/100)^2 = 0.09$;

$\mathcal{B} = \mathcal{M}_1' \cap \mathcal{M}_2'$, $P(\mathcal{B}) = P(\mathcal{M}_1') \cdot P(\mathcal{M}_2') = (80/100)^2 = 0.64$;

$\mathcal{C} = \mathcal{C}_2'$, $P(\mathcal{C}) = P(\mathcal{C}_2') = 90/100 = 0.9$;

$\mathcal{D} = (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{L}_1) \cap \mathcal{R}_2$, $P(\mathcal{D}) = P(\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{L}_1) \cdot P(\mathcal{R}_2) = 50/100 \cdot 40/100 = 0.2$

$\mathcal{E} = (\mathcal{L}_1' \cap \mathcal{L}_2')$, $P(\mathcal{E}) = 1 - P(\mathcal{L}_1) \cdot P(\mathcal{L}_2) = 1 - (70/100)^2 = 0.51$;

$\mathcal{F} = (\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)'$, $P(\mathcal{F}) = 1 - P(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) = 1 - (10/100)^2 = 0.99$;

$\mathcal{G} = (\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2') \cup (\mathcal{R}_1' \cap \mathcal{R}_2)$, $P(\mathcal{G}) = P(\mathcal{R}_1) \cdot P(\mathcal{R}_2') + P(\mathcal{R}_1') \cdot P(\mathcal{R}_2) = 40/100 \cdot 60/100 + 60/100 \cdot 40/100 = 0.48$

5. Dogodki \mathcal{B}_i oziroma \mathcal{R}_i naj pomenijo, da smo pri i -tem potegu izvlekli bele oziroma rdeče krogle.

$\mathcal{A} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3 \cap \mathcal{R}_4$, $P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{R}_1) \cdot P(\mathcal{R}_2|\mathcal{R}_1) \cdot P(\mathcal{R}_3|\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2) \cdot P(\mathcal{R}_4|\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2\mathcal{R}_3) = 7/10 \cdot 6/9 \cdot 5/8 \cdot 4/7 = 1/6$;

$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \cap \mathcal{B}_3 \cap \mathcal{B}_4$, $P(\mathcal{B}) = P(\mathcal{B}_1) \cdot P(\mathcal{B}_2|\mathcal{B}_1) \cdot P(\mathcal{B}_3|\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2) \cdot P(\mathcal{B}_4|\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3) = 3/10 \cdot 2/9 \cdot 7/8 \cdot 6/7 = 1/20$

6. $\mathcal{A}_1 = \{\text{iz prve žare potegnemo modro kroglico}\}$, $\mathcal{A}_2 = \{\text{iz druge žare potegnemo modro kroglico}\}$, $\mathcal{A} = \{\text{iz obeh žar potegnemo modro kroglico}\} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$, dogodka \mathcal{A}_1 in \mathcal{A}_2 pa sta neodvisna, zato imamo: $P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A}_1) \cdot P(\mathcal{A}_2) = 10/15 \cdot 3/10 = 1/5$

7. $\mathcal{A} = \{\text{izvlečeni kroglici sta enake barve}\}$, $\mathcal{A}_1 = \{\text{izvlečeni kroglici sta beli}\}$, $\mathcal{A}_2 = \{\text{izvlečeni kroglici sta rdeči}\}$, $\mathcal{A}_3 = \{\text{izvlečeni kroglici sta črni}\}$, $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_k = \mathcal{V}$ za $i \neq k$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \Rightarrow P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A}_1) + P(\mathcal{A}_2) + P(\mathcal{A}_3) = 5 \cdot 10/(24 \cdot 24) + 11 \cdot 8/(24 \cdot 24) + 8 \cdot 6/(24 \cdot 24) \approx 0.323$

8. Dogodki \mathcal{B}_i oziroma \mathcal{C}_i naj pomenijo, da smo potegnili iz i -te žare belo oziroma črno kroglico; dogodki so med seboj neodvisni. $\mathcal{A} = (\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \cap \mathcal{C}_3) \cup (\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{B}_3) \cup (\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{B}_2 \cap \mathcal{B}_3)$, če je $\mathcal{A} = \{\text{iz treh žar potegnemo 2 beli in 1 črno kroglico}\}$. Dogodki v uniji so nezdružljivi.

$P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{B}_1) \cdot P(\mathcal{B}_2) \cdot P(\mathcal{C}_3) + P(\mathcal{B}_1) \cdot P(\mathcal{C}_2) \cdot P(\mathcal{B}_3) + P(\mathcal{C}_1) \cdot P(\mathcal{B}_2) \cdot P(\mathcal{B}_3) = 23/60$

9. $\mathcal{A} = \{\text{izvlečeni karti imata oznako križ}\}$, $\mathcal{A}_1 = \{\text{prva izvlečena karta je križ}\}$, $\mathcal{A}_2 = \{\text{druga izvlečena karta je križ}\}$.

a) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$, dogodka \mathcal{A}_1 in \mathcal{A}_2 sta neodvisna, $P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A}_1) \cdot P(\mathcal{A}_2) = (8/32)^2 = 1/16$;

b) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$, $P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A}_1) \cdot P(\mathcal{A}_2|\mathcal{A}_1) = 8/32 \cdot 7/31 = 7/124$

10. $\mathcal{A} = \{\text{3 karte izvlečemo pred prvim asom}\}$, $\mathcal{A}_i = \{\text{i-ta izvlečena karta ni as}\}$, $i = 1, 2, 3$; $\mathcal{B} = \{\text{četrti izvlečena karta je as}\}$.

a) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3 \cap \mathcal{B}$, dogodki \mathcal{A}_i in \mathcal{B} so med seboj neodvisni, $P(\mathcal{A}) = (28/32)^3 \cdot 4/32 = 343/4096$;

b) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3 \cap \mathcal{B}$, $P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A}_1) \cdot P(\mathcal{A}_2|\mathcal{A}_1) \cdot P(\mathcal{A}_3|\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2) \cdot P(\mathcal{B}|\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3) = 28/32 \cdot 27/31 \cdot 26/30 \cdot 4/29 = 819/8990$

11. Dogodke: pri i -tem potegu smo izvlekli as, kralja, srce oziroma pik označimo z $\mathcal{A}_i, \mathcal{H}_i, \mathcal{S}_i, \mathcal{P}_i$; dogodki so med seboj neodvisni.

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1' \cap \mathcal{A}_2$, $P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A}_1') \cdot P(\mathcal{A}_2) = 28/32 \cdot 4/32 = 7/64$;

$\mathcal{B} = \mathcal{H}_1' \cap \mathcal{H}_2'$, $P(\mathcal{B}) = P(\mathcal{H}_1') \cdot P(\mathcal{H}_2') = (28/32)^2 = 49/64$;

$\mathcal{C} = (\mathcal{S}_1' \cap \mathcal{S}_2)'$, $P(\mathcal{C}) = 1 - P(\mathcal{S}_1') \cdot P(\mathcal{S}_2) = 1 - (24/32)^2 = 7/16$;

$\mathcal{D} = \mathcal{P}_2$, $P(\mathcal{D}) = P(\mathcal{P}_2) = 8/32 = 1/4$

12. $\mathcal{A}_i = \{\text{iz } i\text{-tega kupa izvlečena karta ni srce as}\}, i = 1, 2;$
 $\mathcal{A} = \{\text{nobena izvlečena karta ni srce as}\} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$, dogodka $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ pa sta neodvisna.
 $\mathcal{A}' = \{\text{vsaj ena izvlečena karta je srce as}\}, P(\mathcal{A}') = 1 - P(\mathcal{A}) =$
 $= 1 - (31/32)^2 = 63/1024$
13. $\mathcal{A}_i = \{\text{v } i\text{-tem metu vržemo šestico}\}, i = 1, 2, 3$. Dogodki $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ so neodvisni, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3$, $P(\mathcal{A}) = (1/6)^3 = 1/216;$
 $\mathcal{B}_1 = \{\text{pri prvem metu je padlo sodo število pik}\}, \mathcal{B}_2 = \{\text{pri drugem metu je padla šestica}\}, \mathcal{B}_3 = \{\text{pri tretjem metu je padlo manj kot 4 pike}\}$. Dogodki $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ so med seboj neodvisni, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \cap \mathcal{B}_3$, $P(\mathcal{B}) =$
 $= 3/6 \cdot 1/6 \cdot 3/6 = 1/24$.
14. $\mathcal{A}_i = \{\text{pri metu } i\text{-te kocke je padlo število pik, ki ni deljivo s } 3\}, i = 1, 2;$ $\mathcal{A} =$
 $= \{\text{pri metu prve in pri metu druge kocke padlo število pik ni deljivo s } 3\} =$
 $= \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ (neodvisna dogodka). $\mathcal{A}' = \{\text{vsaj na eni kocki je vrženo število pik deljivo s } 3\}$, $P(\mathcal{A}') = 1 - P(\mathcal{A}) = 1 - (4/6)^2 = 5/9$
15. $\mathcal{A}_i = \{\text{pri } i\text{-tem metu vržemo na obeh kockah isto število pik}\}, i = 1, 2, 3;$
 $\mathcal{A} = \{\text{nobenkrat v treh metih ne vržemo na obeh kockah istega števila pik}\} =$
 $= \mathcal{A}_1' \cap \mathcal{A}_2' \cap \mathcal{A}_3'$, dogodki pa so med seboj neodvisni.
 $\mathcal{A}' = \{\text{vsaj enkrat v treh metih vržemo na obeh kockah isto število pik}\}$,
 $P(\mathcal{A}') = 1 - P(\mathcal{A}) = 1 - (5/6)^3 = 91/216$
16. $\mathcal{A}_1 = \{\text{prvi strelec zadene}\}, P(\mathcal{A}_1) = p_1; \mathcal{A}_2 = \{\text{drugi strelec zadene}\}, P(\mathcal{A}_2) =$
 $= p_2$. Dogodka \mathcal{A}_1 in \mathcal{A}_2 sta med seboj neodvisna.
 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$, $P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A}_1) \cdot P(\mathcal{A}_2) = p_1 p_2$
 $\mathcal{B} = \mathcal{A}_1' \cap \mathcal{A}_2'$, $P(\mathcal{B}) = P(\mathcal{A}_1') \cdot P(\mathcal{A}_2') = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2)$
 $\mathcal{C} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2'$, $P(\mathcal{C}) = P(\mathcal{A}_2') \cdot P(\mathcal{A}_1) = (1 - p_2) \cdot p_1$
 $\mathcal{D} = \mathcal{A}_1' \cap \mathcal{A}_2$, $P(\mathcal{D}) = P(\mathcal{A}_1') \cdot P(\mathcal{A}_2) = (1 - p_1) \cdot p_2$
 $\mathcal{E} = \mathcal{B}'$, $P(\mathcal{E}) = 1 - P(\mathcal{B}) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$
 $\mathcal{F} = \mathcal{A}'$, $P(\mathcal{F}) = 1 - P(\mathcal{A}) = 1 - p_1 p_2$
17. $\mathcal{A}_i = \{\textit>i\text{-ti strelec zadene tarčo}\}, i = 1, 2, 3;$ dogodki \mathcal{A}_i so med seboj neodvisni.
a) $\mathcal{A} = \{\text{tarča je natanko enkrat zadeta}\} = (\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2' \cap \mathcal{A}_3') \cup (\mathcal{A}_1' \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3) \cup (\mathcal{A}_1' \cap \mathcal{A}_2' \cap \mathcal{A}_3)$
 $\Rightarrow P(\mathcal{A}) = 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.7 = 0.36$, saj so dogodki v uniji nezdržljivi.
b) $\mathcal{B} = \{\text{noben strelec ne zadene}\} = \mathcal{A}_1' \cap \mathcal{A}_2' \cap \mathcal{A}_3'$, $\mathcal{B}' = \{\text{vsaj en strelec zadene}\}$, $P(\mathcal{B}') = 1 - P(\mathcal{B}) = 1 - P(\mathcal{A}_1') \cdot P(\mathcal{A}_2') \cdot P(\mathcal{A}_3') = 0.91$
18. $\mathcal{A}_1 = \{\text{prvi strelec zadene tarčo}\}, \mathcal{A}_2 = \{\text{drugi strelec zadene tarčo}\}$, dogodka \mathcal{A}_1 in \mathcal{A}_2 sta neodvisna; $\mathcal{A} = \{\text{strelca zadeneta tarčo}\} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \Rightarrow P(\mathcal{A}) =$
 $= P(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) = P(\mathcal{A}_1) + P(\mathcal{A}_2) - P(\mathcal{A}_1) \cdot P(\mathcal{A}_2) =$
 $= 0.8 + 0.65 - 0.8 \cdot 0.65 = 0.93$

19. $\mathcal{A} = \{\text{prvi dijak reši problem}\}, \mathcal{B} = \{\text{drugi dijak reši problem}\}$, dogodka \mathcal{A} in \mathcal{B} sta med seboj neodvisna; $\mathcal{C} = \{\text{dijaka rešita problem}\} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \Rightarrow$
 $\Rightarrow P(\mathcal{C}) = P(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B}) - P(\mathcal{A}) \cdot P(\mathcal{B}) = 3/5 + 2/3 -$
 $- 3/5 \cdot 2/3 = 13/15$
20. $\mathcal{A} = \{\text{naprava dela brez kvara}\}, \mathcal{A}_1 = \{\text{del 1 dela brez kvara}\}, \mathcal{A}_2 = \{\text{del 2 dela brez kvara}\}, \mathcal{A}_3 = \{\text{del 3 dela brez kvara}\}$. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ so neodvisni dogodki, $P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A}_1) \cdot P(\mathcal{A}_2) \cdot P(\mathcal{A}_3) = 0.504$
21. $\mathcal{A} = \{\text{pri dveh poskusih je tekmovalec izboljšal rezultat}\}, \mathcal{A}_1 = \{\text{v prvem poskusu je tekmovalec izboljšal rezultat}\}, \mathcal{A}_2 = \{\text{v drugem poskusu je tekmovalec izboljšal rezultat}\}$, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) \cup (\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2')$
 $\cup (\mathcal{A}_1' \cap \mathcal{A}_2)$, dogodki $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2'$, $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ in $\mathcal{A}_1' \cap \mathcal{A}_2$ so nezdržljivi, dogodka \mathcal{A}_1 in \mathcal{A}_2 pa neodvisna $\Rightarrow P(\mathcal{A}) = p(1 - p) + p \cdot p + (1 - p) \cdot p = p(2 - p)$
22. $\mathcal{A} = \{\text{krogla št. 2 je izvlečena pri drugem potegu}\}$,
 $\mathcal{A}_1 = \{\text{pri prvem potegu je izvlečena krogla št. 1}\}$,
 $\mathcal{A}_1' = \{\text{pri prvem potegu ni izvlečena krogla št. 1}\}$,
 $\mathcal{A} = (\mathcal{A} \cap \mathcal{A}_1) \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{A}_1')$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}_1$ in $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}_1'$ sta nezdržljiva dogodka \Rightarrow
 $\Rightarrow P(\mathcal{A}) = 1/n \cdot 1/(n - 1) + (n - 1)/n \cdot 1/n = 1/n(1/(n - 1) + (n - 1)/n)$
23. $\mathcal{A} = \{\text{večkrat pade grb kot številka}\}, \mathcal{A}_1 = \{\text{pade 6 grbov}\}, \mathcal{A}_2 = \{\text{pade 5 grbov}\}, \mathcal{A}_3 = \{\text{padejo 4 grbi}\}$; $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$, $P(\mathcal{A}_1) = 1/2^6$, $P(\mathcal{A}_2) =$
 $= \binom{6}{5}/2^6$, $P(\mathcal{A}_3) = \binom{6}{4}/2^6$, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ in \mathcal{A}_3 so nezdržljivi dogodki $\Rightarrow P(\mathcal{A}) =$
 $= P(\mathcal{A}_1) + P(\mathcal{A}_2) + P(\mathcal{A}_3) = 11/32$.
Nalogo lahko rešimo tudi drugače: $\mathcal{A} = \{\text{večkrat pade grb kot številka}\}$,
 $\mathcal{B} = \{\text{večkrat pade številka kot grb}\}, \mathcal{C} = \{\text{pade enako število številke kot grbov}\}$. $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} = \mathcal{U}$, $P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{B})$, $P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B}) + P(\mathcal{C}) = 1$,
 $2P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{C}) = 1$, $P(\mathcal{C}) = \binom{6}{5}/2^6$, $P(\mathcal{A}) = (1 - P(\mathcal{C}))/2 = 11/32$
24. $\mathcal{A}_i = \{\text{kandidat odgovori na } i\text{-to vprašanje}\}, i = 1, 2, 3;$ $P(\mathcal{A}_1) = 0.8$, $P(\mathcal{A}_2) =$
 $= 0.5$ in $P(\mathcal{A}_3) = 0.2$, odgovori na posamezna vprašanja so neodvisni dogodki;
 $\mathcal{A} = \{\text{kandidat opravi izpit}\} = (\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3) \cup (\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3') \cup (\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2' \cap \mathcal{A}_3) \cup (\mathcal{A}_1' \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3)$, dogodki v uniji so nezdržljivi $\Rightarrow P(\mathcal{A}) =$
 $= 0.8 \cdot 0.5 \cdot 0.2 + \dots = 0.5$
25. $\mathcal{A} = \{\text{letalo se zruši po dveh zadetkih}\}, \mathcal{B} = \{\text{vsaj eden od dveh zadetkov zadene prvi predel}\}$, $\mathcal{B}' = \{\text{noben od dveh zadetkov ne zadene prvega predela}\}$,
 $\mathcal{C} = \{\text{dva zadetka zadeneta drugi predel}\}, \mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \mathcal{V}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \Rightarrow$
 $\Rightarrow P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{B}) + P(\mathcal{C}) = 1 - P(\mathcal{B}') + P(\mathcal{C}) = 1 - 0.9^2 + 0.2^2 = 0.23$
26. $\mathcal{B}_i = \{\text{cilj zadenemo z } i\text{-tega mesta}\}, i = 1, 2, 3;$ $\mathcal{A}_k = \{\text{v treh streljih, s treh različnih mest smo cilj zadeli } k = 0, 1, 2, 3\text{-krat}\}$.
 $P(\mathcal{B}_1) = 0.1$, $P(\mathcal{B}_2) = 0.2$, $P(\mathcal{B}_3) = 0.3$, dogodki \mathcal{B}_i pa so med seboj neodvisni;
 $\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}_1' \cap \mathcal{B}_2' \cap \mathcal{B}_3' \Rightarrow P(\mathcal{A}_0) = 0.504;$
 $\mathcal{A}_1 = (\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2' \cap \mathcal{B}_3') \cup (\mathcal{B}_1' \cap \mathcal{B}_2 \cap \mathcal{B}_3') \cup (\mathcal{B}_1' \cap \mathcal{B}_2' \cap \mathcal{B}_3) \Rightarrow$
 $\Rightarrow P(\mathcal{A}_1) = 0.398$, dogodki v uniji so nezdržljivi;

$$\mathcal{A}_2 = (\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \cap \mathcal{B}_3) \cup (\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2' \cap \mathcal{B}_3) \cup (\mathcal{B}_1' \cap \mathcal{B}_2 \cap \mathcal{B}_3) \Rightarrow \\ \Rightarrow P(\mathcal{A}_2) = 0.092, \text{ dogodki v uniji so nezdržljivi}; \\ \mathcal{A}_3 = \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \cap \mathcal{B}_3 \Rightarrow P(\mathcal{A}_3) = 0.006$$

27. $\mathcal{A} = \{\text{pri 10 potegih ni nobenkrat izvlečena rdeča krogla}\},$
 $\mathcal{A}' = \{\text{pri 10 potegih je vsaj enkrat izvlečena rdeča krogla}\},$
 $\mathcal{B} = \{\text{pri enkratnem potegu iz žare je bila izvlečena bela krogla}\}, P(\mathcal{B}) = 0.9.$
 a) $P(\mathcal{A}) = 0.9^{10}, P(\mathcal{A}') = 1 - P(\mathcal{A}) \doteq 0.65;$
 b) $1 - 0.9^n \geq 0.9 \Rightarrow n \geq 22,$ vlečemo torej vsaj še 21-krat.
28. $\mathcal{A}_i = \{\text{v časovnem intervalu } \Delta t \text{ smo izgubili } i\text{-ti objekt}\}, i = 1, 2, \dots, 10;$
 $\mathcal{A}'_i = \{\dots \text{ objekta } i \text{ nismo izgubili}\}, \mathcal{A} = \{\dots \text{ nismo izgubili nobenega objekta}\},$
 $\mathcal{A}' = \{\dots \text{ smo izgubili vsaj en objekt}\}. P(\mathcal{A}_i) = 0.1, P(\mathcal{A}'_i) = 0.9;$
 $\mathcal{A} = \mathcal{A}'_1 \cap \mathcal{A}'_2 \cap \dots \cap \mathcal{A}'_{10} \Rightarrow P(\mathcal{A}) = 0.9^{10}; P(\mathcal{A}') = 1 - P(\mathcal{A}) \doteq 0.65$
29. a) $\mathcal{A}_i = \{\text{porabnik } i \text{ je pokvarjen}\}, i = 1, 2, \dots, 6, \mathcal{A} = \{\text{vezje ne prevaja električnega toka}\}, P(\mathcal{A}_1) = p_1 = 0.6, P(\mathcal{A}_2) = p_2 = 0.2, P(\mathcal{A}_3) = \dots = P(\mathcal{A}_6) = p_3 = 0.3,$
 $P(\mathcal{A}'_i) = q_i = 1 - p_i; \mathcal{A}' = \mathcal{A}'_1 \cap \mathcal{A}'_2 \cap \dots \cap \mathcal{A}'_6 \Rightarrow P(\mathcal{A}') = q_1 q_2 q_3^4; P(\mathcal{A}) = 1 - P(\mathcal{A}') = 0.923;$
 b) $\mathcal{A}_i = \{\text{porabnik } i \text{ je pokvarjen}\}, i = 1, 2, \dots, 6; \mathcal{B} = \{\text{vezje ne prevaja električnega toka}\}, \mathcal{B}_{1,2} = \{\text{sistem porabnikov 1, 2 ne prevaja električnega toka}\};$
 $\mathcal{B}_{3,4} = \{\text{sistem porabnikov 3, 4 ne prevaja električnega toka}\}, \mathcal{B}_{5,6} = \{\text{sistem porabnikov 5, 6 ne prevaja električnega toka}\}. \mathcal{B} = \mathcal{B}_{1,2} \cap \mathcal{B}_{3,4} \cap \mathcal{B}_{5,6};$
 $\mathcal{B}_{1,2} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = (\mathcal{A}'_1 \cap \mathcal{A}'_2)' \Rightarrow P(\mathcal{B}_{1,2}) = 1 - q_1 q_2; \mathcal{B}_{3,4} = \mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4 = (\mathcal{A}'_3 \cap \mathcal{A}'_4)' \Rightarrow P(\mathcal{B}_{3,4}) = 1 - q_3^2; \text{ analogno } P(\mathcal{B}_{5,6}) = 1 - q_5^2;$
 $P(\mathcal{B}) = (1 - q_1 q_2)(1 - q_3^2)^2 \doteq 0.177$
30. $\mathcal{B} = \{\text{izbrani izdelek je defekten}\}, \mathcal{B}' = \{\text{izbrani izdelek ni defekten}\}, \mathcal{A} = \{\text{v skupini } n \text{ izbranih izdelkov ni nobeden defekten}\}, \mathcal{A}' = \{\text{v skupini } n \text{ izbranih izdelkov je vsaj eden defekten}\}. P(\mathcal{B}) = 0.1, P(\mathcal{B}') = 0.9, P(\mathcal{A}) = 0.9^n, P(\mathcal{A}') = 1 - 0.9^n, 1 - 0.9^n \geq 0.95 \Rightarrow n \geq 29$
31. $P(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B}) - P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \leq 1 \Rightarrow P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \geq P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B}) - 1 \Rightarrow P(\mathcal{B}|\mathcal{A}) \geq P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B}) - 1 \Rightarrow P(\mathcal{A}|\mathcal{B}) \geq (P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B}) - 1)/P(\mathcal{B}) = (a + b - 1)/b$
32. $\mathcal{B} = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A}' \cap \mathcal{B}), \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ in $\mathcal{A}' \cap \mathcal{B}$ pa sta nezdržljiva dogodka $\Rightarrow P(\mathcal{B}) = P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) + P(\mathcal{A}' \cap \mathcal{B}) = P(\mathcal{A}) \cdot P(\mathcal{B}|\mathcal{A}) + P(\mathcal{A}') \cdot P(\mathcal{B}|\mathcal{A}')$
 $= P(\mathcal{A}) \cdot P(\mathcal{B}|\mathcal{A}) + P(\mathcal{A}') \cdot P(\mathcal{B}|\mathcal{A}'),$ ker je $P(\mathcal{B}|\mathcal{A}') = P(\mathcal{B}|\mathcal{A}) \Rightarrow P(\mathcal{B}) = (P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{A}')) \cdot P(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = P(\mathcal{B}|\mathcal{A}),$ dogodka \mathcal{A} in \mathcal{B} sta neodvisna.
33. $\mathcal{A}_1 = \{\text{element 1 ne prevaja toka}\}, \mathcal{A}_2 = \{\text{element 2 ne prevaja toka}\}, \mathcal{B} = \{\text{vezje ne prevaja električnega toka}\};$
 $n = 2^3 = 8, m(\mathcal{B}) = 5, m(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{B}) = 4, m(\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{B}) = 3,$
 $P(\mathcal{B}) = 5/8, P(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{B}) = 4/8, P(\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{B}) = 3/8;$
 a) $P(\mathcal{A}_1|\mathcal{B}) = 4/5, \text{ b) } P(\mathcal{A}_2|\mathcal{B}) = 3/5$

34. $\mathcal{A}_1 = \{\text{element 1 prevaja električni tok}\}, \mathcal{A}_2 = \{\text{element 2 prevaja električni tok}\}, \mathcal{B} = \{\text{vezje prevaja električni tok}\};$
 $n = 2^5 = 32, m(\mathcal{B}) = 16, m(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{B}) = 11, m(\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{B}) = 9, P(\mathcal{B}) = 16/32, P(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{B}) = 11/32, P(\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{B}) = 9/32;$
 a) $P(\mathcal{A}_1|\mathcal{B}) = 11/16, \text{ b) } P(\mathcal{A}_2|\mathcal{B}) = 9/16$

35. $\mathcal{H}_i = \{\text{pokvaril se je element } k_i\}, \mathcal{L}_j = \{\text{pokvaril se je element } l_j\}, \mathcal{A} = \{\text{tok med A in B je prekinjen}\} = (\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2) \cup (\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_3).$ Vpeljimo $\mathcal{K} = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ in $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_3.$
 $P(\mathcal{K}) = P(\mathcal{H}_1) + P(\mathcal{H}_2) - P(\mathcal{H}_1) \cdot P(\mathcal{H}_2) = 0.8,$
 $P(\mathcal{L}) = P(\mathcal{L}_1) \cdot P(\mathcal{L}_2) \cdot P(\mathcal{L}_3) = 0.252,$
 $P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{K}) + P(\mathcal{L}) - P(\mathcal{K}) \cdot P(\mathcal{L}) \doteq 0.85$

36. Deli a_1, a_2 in avtomat t_1 sestavljajo sistem $b.$ Deli a_3, a_4 in avtomat t_2 pa tvorijo sistem $c.$ $\mathcal{A} = \{\text{cela naprava deluje}\}, \mathcal{A}_i = \{\text{del } a_i \text{ deluje}\}, \mathcal{T}_i = \{\text{avtomat } t_i \text{ deluje}\}, \mathcal{B} = \{\text{sistem } b \text{ deluje}\}, \mathcal{C} = \{\text{sistem } c \text{ deluje}\};$
 $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cap \mathcal{C}, \mathcal{B} = \mathcal{A}_1 \cup (\mathcal{A}'_1 \cap \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{A}_2), \mathcal{C} = \mathcal{A}_3 \cup (\mathcal{A}'_3 \cap \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{A}_4),$
 $P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{B}) \cdot P(\mathcal{C}) = (p_1 + (1 - p_1) \cdot p \cdot p_2) \cdot (p_3 + (1 - p_3) \cdot p \cdot p_4)$

XVII/5. Polna verjetnost

1. $\mathcal{A} = \{\text{izvlečena krogla je bela}\}, \mathcal{H}_i = \{\text{izbrali smo } i\text{-to žaro}\}, i = 1, 2, 3;$
 $P(\mathcal{H}_i) = 1/3, P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_1) = 2/3, P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_2) = 3/4, P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_3) = 2/4 \Rightarrow P(\mathcal{A}) = 23/36$
2. $\mathcal{A} = \{\text{izvlečena krogla je bela}\}, \mathcal{H}_1 = \{\text{prenesli smo dve beli krogli}\}, \mathcal{H}_2 = \{\text{prenesli smo dve rdeči krogli}\}, \mathcal{H}_3 = \{\text{prenesli smo belo in rdečo kroglo}\};$
 $P(\mathcal{H}_1) = 1/3, P(\mathcal{H}_2) = 2/15, P(\mathcal{H}_3) = 4/15, P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_1) = 4/7, P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_2) = 2/7, P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_3) = 3/7 \Rightarrow P(\mathcal{A}) = 12/35$
3. $\mathcal{A} = \{\text{iz tretje žare izvlečena kroglica je rdeča}\}, \mathcal{H}_1 = \{\text{iz 1. v 2. žaro smo prenesli belo kroglico}\}, \mathcal{H}_2 = \{\text{iz 1. v 2. žaro smo prenesli rdečo kroglico}\}, \mathcal{H}_3 = \{\text{iz 2. v 3. žaro smo prenesli belo kroglico}\}, \mathcal{H}_4 = \{\text{iz 2. v 3. žaro smo prenesli rdečo kroglico}\}. P(\mathcal{H}_1) = P(\mathcal{H}_2) = 1/2,$
 $P(\mathcal{H}_1|\mathcal{H}_1) = 2/5, P(\mathcal{H}_1|\mathcal{H}_2) = 1/5 \Rightarrow P(\mathcal{H}_1) = \sum P(\mathcal{H}_i) \cdot P(\mathcal{H}_1|\mathcal{H}_i) = 3/10;$
 $P(\mathcal{H}_2|\mathcal{H}_1) = 3/5, P(\mathcal{H}_2|\mathcal{H}_2) = 4/5 \Rightarrow P(\mathcal{H}_2) = \sum P(\mathcal{H}_i) \cdot P(\mathcal{H}_2|\mathcal{H}_i) = 7/10;$
 $P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_1) = 1/5, P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_2) = 2/5 \Rightarrow P(\mathcal{A}) = \sum P(\mathcal{H}_i) \cdot P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_i) = 17/50$
4. $\mathcal{A} = \{\text{izbrana žarnica je standardne kakovosti}\}, \mathcal{H}_i = \{\text{žarnica je bila izdelana v } i\text{-ti tovarni}\}, i = 1, 2, 3;$
 $P(\mathcal{H}_1) = 0.4, P(\mathcal{H}_2) = 0.35, P(\mathcal{H}_3) = 0.25, P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_1) = 0.95, P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_2) = 0.92, P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_3) = 0.96 \Rightarrow P(\mathcal{A}) = 0.942$
5. $\mathcal{A} = \{\text{10 žarnic, vzeti iz zaboja s stotimi žarnicami, je dobrih}\}, \mathcal{H}_0 = \{\text{v zaboju ni nobene defektne žarnice}\}, \mathcal{H}_1 = \{\text{v zaboju je ena defektna žarnica}\}, \mathcal{H}_2 = \{\text{v zaboju sta dve defektne žarnici}\};$

$$P(\mathcal{H}_i) = 1/3, \quad i = 0, 1, 2;$$

$$P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_0) = 1, \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_1) = \binom{99}{10}/\binom{100}{10}, \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_2) = \binom{98}{10}/\binom{100}{10} \Rightarrow \\ \Rightarrow P(\mathcal{A}) \doteq 0.903$$

6. $\mathcal{A} = \{\text{slučajno izbran element iz skupine je defekten}\},$

$\mathcal{H}_i = \{\text{slučajno izbran element je iz } i\text{-te tovarne}\}, \quad i = 1, 2, 3;$

$$P(\mathcal{H}_1) = 0.20, \quad P(\mathcal{H}_2) = 0.30, \quad P(\mathcal{H}_3) = 0.50, \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_1) = 0.05,$$

$$P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_2) = 0.01, \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_3) = 0.06 \Rightarrow P(\mathcal{A}) = 0.043$$

7. $\mathcal{A} = \{\text{letalo se zruši}\}, \quad \mathcal{H}_1 = \{\text{letalo smo zadeli enkrat}\},$

$\mathcal{H}_2 = \{\text{letalo smo zadeli dvakrat}\}, \quad \mathcal{L}_1 = \{\text{letalo smo zadeli s prvim strelom}\},$

$\mathcal{L}_2 = \{\text{letalo smo zadeli z drugim strelom}\}; \quad \mathcal{L}_1 \text{ in } \mathcal{L}_2 \text{ sta med seboj neodvisna dogodka.}$

$$\mathcal{H}_1 = (\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2') \cup (\mathcal{L}_1' \cap \mathcal{L}_2) \Rightarrow P(\mathcal{H}_1) = P(\mathcal{L}_1) \cdot P(\mathcal{L}_2') + \\ + P(\mathcal{L}_1') \cdot P(\mathcal{L}_2) = 0.54;$$

$$\mathcal{H}_2 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \Rightarrow P(\mathcal{H}_2) = P(\mathcal{L}_1) \cdot P(\mathcal{L}_2) = 0.18;$$

$$P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_1) = 0.2, \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_2) = 0.9 \Rightarrow P(\mathcal{A}) = 0.27$$

XVII/6. Bayesova formula

1. $\mathcal{A} = \{\text{izvlečeni krogli sta bela in rdeča}\}, \quad \mathcal{H}_i = \{\text{izvlečeni krogli sta iz } i\text{-te}$

žare}, $i = 1, 2, 3;$ $P(\mathcal{H}_i) = 1/3, \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_1) = 1/3, \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_2) = 1/5,$

$$P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_3) = 2/15 \Rightarrow P(\mathcal{A}) = 2/9 \Rightarrow P(\mathcal{H}_1|\mathcal{A}) = 1/2, \quad P(\mathcal{H}_2|\mathcal{A}) = 3/10,$$

$$P(\mathcal{H}_3|\mathcal{A}) = 1/5$$

2. Omenjenih devet žar naj sestavlja prvo skupino, preostale pa drugo skupino

žar. $\mathcal{A} = \{\text{izvlečena krogla je bela}\}, \quad \mathcal{H}_1 = \{\text{slučajno izbrana žara je iz prve}$

skupine}, $\mathcal{H}_2 = \{\text{slučajno izbrana žara je iz druge skupine}\}; \quad P(\mathcal{H}_1) = 0.9,$

$$P(\mathcal{H}_2) = 0.1, \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_1) = 1/2, \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_2) = 5/6 \Rightarrow P(\mathcal{A}) = 8/15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(\mathcal{H}_2|\mathcal{A}) = 5/32$$

3. $\mathcal{A} = \{\text{izvlečene kroglice so: 1 bela in 2 črni}\}, \quad \mathcal{H}_i = \{\text{izvlečene kroglice so iz}$

i -te skupine žar}, $i = 1, 2, 3;$ $P(\mathcal{H}_1) = 0.3, \quad P(\mathcal{H}_2) = 0.5, \quad P(\mathcal{H}_3) = 0.2,$

$$P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_1) = 0.3, \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_2) = 12/35, \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_3) = 0.5 \Rightarrow P(\mathcal{A}) = 253/700 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(\mathcal{H}_1|\mathcal{A}) = 63/253, \quad P(\mathcal{H}_2|\mathcal{A}) = 120/253, \quad P(\mathcal{H}_3|\mathcal{A}) = 70/253$$

4. $\mathcal{A} = \{\text{iz 2. žare vzeta kroglica je črna}\}, \quad \mathcal{H}_1 = \{\text{prenesli smo belo kroglico}\},$

$\mathcal{H}_2 = \{\text{prenesli smo črno kroglico}\}; \quad P(\mathcal{H}_1) = 3/4, \quad P(\mathcal{H}_2) = 1/4,$

$$P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_1) = 3/4, \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_2) = 7/8 \Rightarrow P(\mathcal{A}) = 25/32 \Rightarrow P(\mathcal{H}_1|\mathcal{A}) = 18/25$$

5. $\mathcal{A} = \{\text{iz 2. žare vzeta kroglica je bela}\}, \quad \mathcal{H}_1 = \{\text{prenesli smo 2 beli kroglici}\},$

$\mathcal{H}_2 = \{\text{prenesli smo 2 rdeči kroglici}\}, \quad \mathcal{H}_3 = \{\text{prenesli smo raznobarni kroglici}\};$

$$P(\mathcal{H}_1) = 5/12, \quad P(\mathcal{H}_2) = 1/12, \quad P(\mathcal{H}_3) = 1/2, \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_1) = 5/13,$$

$$P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_2) = 3/13, \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_3) = 4/13 \Rightarrow P(\mathcal{A}) = 1/3 \Rightarrow P(\mathcal{H}_3|\mathcal{A}) = 6/13$$

6. $\mathcal{A} = \{\text{izvlečena krogla je bela}\}, \quad \mathcal{H}_1 = \{\text{slučajno izbrana žara je iz 1. skupine}\},$
 $\mathcal{H}_2 = \{\text{slučajno izbrana žara je iz 2. skupine}\}; \quad P(\mathcal{H}_1) = k_1/(k_1 + k_2), \quad P(\mathcal{H}_2) =$
 $= k_2/(k_1 + k_2), \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_1) = m_1/(m_1 + n_1), \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_2) = m_2/(m_2 + n_2) \Rightarrow P(\mathcal{A}) =$
 $= (k_1 m_1 (m_2 + n_2) + k_2 m_2 (m_1 + n_1)) / ((k_1 + k_2) (m_1 + n_1) (m_2 + n_2)) \Rightarrow P(\mathcal{H}_1|\mathcal{A}) =$
 $= (1 + k_2 m_2 (m_1 + n_1) / (k_1 m_1 (m_2 + n_2)))^{-1}$

7. $\mathcal{A} = \{\text{poenostavljena kontrola je izdelku priznala standard}\}, \quad \mathcal{H}_1 = \{\text{izdelek}$

zadošča standardu}, $\mathcal{H}_2 = \{\text{izdelek ne zadošča standardu}\}; \quad P(\mathcal{H}_1) = 0.96,$

$$P(\mathcal{H}_2) = 0.04, \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_1) = 0.98, \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_2) = 0.05 \Rightarrow P(\mathcal{A}) \doteq 0.943 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(\mathcal{H}_1|\mathcal{A}) = 0.998$$

8. $\mathcal{A} = \{\text{izdelek se ne pokvari}\}, \quad \mathcal{H}_1 = \{\text{izdelek je bil izbran izmed visokokvalitetnih}$

izdelkov}, $\mathcal{H}_2 = \{\text{izdelek je bil izbran izmed izdelkov poprečne kvalitete}\};$

$$P(\mathcal{H}_1) = 0.3, \quad P(\mathcal{H}_2) = 0.7, \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_1) = 0.9, \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_2) = 0.7 \Rightarrow P(\mathcal{A}) =$$

$$= 0.76 \Rightarrow P(\mathcal{H}_1|\mathcal{A}) = 27/76$$

9. $\mathcal{A} = \{\text{v trgovini izbrani izdelek je neraben}\}, \quad \mathcal{H}_i = \{\text{izbrani izdelek je iz } i\text{-tega}$

podjetja}, $i = 1, 2, 3, 4;$ $P(\mathcal{H}_1) = 0.1, \quad P(\mathcal{H}_2) = 0.2, \quad P(\mathcal{H}_3) = 0.3,$

$$P(\mathcal{H}_4) = 0.4, \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_1) = 0.5, \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_2) = 0.4, \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_3) = 0.3,$$

$$P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_4) = 0.2 \Rightarrow P(\mathcal{A}) = 0.3 \Rightarrow P(\mathcal{H}_3|\mathcal{A}) = 0.3$$

10. $\mathcal{A} = \{\text{en strel zadene tarčo}\}, \quad \mathcal{H}_1 = \{\text{tarčo je zadel le prvi strellec}\}, \quad \mathcal{H}_2 = \{\text{tarčo}$

je zadel le drugi strellec}, \mathcal{L}_1 in \mathcal{L}_2 pa naj pomenita dogodka, da je zadel prvi,

oziroma drugi strellec; dogodka \mathcal{L}_1 in \mathcal{L}_2 sta med seboj neodvisna.

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2' \Rightarrow P(\mathcal{H}_1) = 0.5 \cdot 0.1 = 0.05;$$

$$\mathcal{H}_2 = \mathcal{L}_1' \cap \mathcal{L}_2 \Rightarrow P(\mathcal{H}_2) = 0.5 \cdot 0.9 = 0.45;$$

$$P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_1) = 1, \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_2) = 1 \Rightarrow P(\mathcal{A}) = 0.5 \Rightarrow P(\mathcal{H}_1|\mathcal{A}) = 0.1,$$

$$P(\mathcal{H}_2|\mathcal{A}) = 0.9$$

11. $\mathcal{A} = \{\text{pri hkratnem strelu vseh treh strelcev sta zadela 2 strelca}\}, \quad \mathcal{H}_i = \{\text{ } i\text{-ti}$

strellec je zgrešil}, $i = 1, 2, 3;$ $P(\mathcal{H}_1) = 1/5, \quad P(\mathcal{H}_2) = 1/4, \quad P(\mathcal{H}_3) = 1/3,$

$$P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_1) = 1/2, \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_2) = 8/15, \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_3) = 3/5 \Rightarrow P(\mathcal{A}) = 13/30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(\mathcal{H}_3|\mathcal{A}) = 6/13$$

12. $\mathcal{A} = \{\text{veper je bil ubit z eno kroglo}\}, \quad \mathcal{H}_i = \{\text{vepra je ubil } i\text{-ti lovec}\}, \quad i = 1, 2, 3;$

$$P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_1) = 1, \quad P(\mathcal{H}_1) = 0.048, \quad P(\mathcal{H}_2) = 0.128, \quad P(\mathcal{H}_3) = 0.288 \Rightarrow P(\mathcal{A}) =$$

$$= 0.464 \Rightarrow P(\mathcal{H}_1|\mathcal{A}) \doteq 0.103, \quad P(\mathcal{H}_2|\mathcal{A}) \doteq 0.276, \quad P(\mathcal{H}_3|\mathcal{A}) \doteq 0.621$$

13. $\mathcal{A} = \{\text{med slučajno izbranimi 10 žarnicami ni nobene defektne}\}, \quad \mathcal{H}_i = \{\text{v za-}$

boju je i - defektnih žarnic}, $i = 0, 1, 2;$ $P(\mathcal{H}_i) = 1/3, \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_0) = 1,$

$$P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_1) = \binom{99}{10}/\binom{100}{10}, \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_2) = \binom{98}{10}/\binom{100}{10} \Rightarrow P(\mathcal{A}) \doteq 0.903 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(\mathcal{H}_0|\mathcal{A}) \doteq 0.369$$

14. $\mathcal{A} = \{\text{slučajno izbran dijak se dobro uči}\}, \quad \mathcal{H}_1 = \{\text{slučajno izbran dijak je}$

iz mesta}, $\mathcal{H}_2 = \{\text{slučajno izbran dijak je iz okolice}\}, \quad \mathcal{H}_3 = \{\text{slučajno izbran}$

dijak je s podeželja};

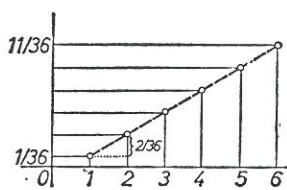
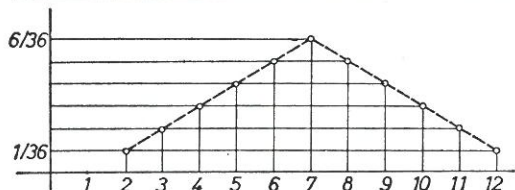
$$P(\mathcal{H}_1) = 10/24, \quad P(\mathcal{H}_2) = 6/24, \quad P(\mathcal{H}_3) = 8/24, \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_1) = 3/10,$$

$$P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_2) = 1/3, \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_3) = 6/8 \Rightarrow P(\mathcal{A}) = 11/24 \Rightarrow P(\mathcal{H}_3|\mathcal{A}) = 6/11$$

XVII/7. Slučajne spremenljivke

1. ξ je vsota pik pri metu dveh kock, $\xi = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36



2. ξ je največje število pik na eni od dveh vrženih kock, $\xi = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

1	2	3	4	5	6
1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

3. ξ je število izbranih izdelkov, $\xi = 1, 2, 3$

1	2	3
8/10	16/90	2/90

4. ξ je število defektnih izdelkov v vzorcu, $\xi = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$$P(\xi = k) = \binom{10}{k} \binom{90}{5-k} / \binom{100}{5}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

0	1	2	3	4	5
0.584	0.339	0.070	0.006	0.000	0.000

5. ξ je število belih med tremi izvlečenimi krogli, $\xi = 0, 1, 2, 3$

$$P(\xi = k) = \binom{3}{k} \cdot \binom{7}{3-k} / \binom{10}{3}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

0	1	2	3
7/24	21/40	7/40	1/120

6. ξ je število izvlečenih krogel, dokler ne potegnemo črne krogel, $\xi = 1, 2, 3, 4$

1	2	3	4
7/10	7/30	7/120	1/120

7. $\xi = 0, 1$

0	1
0.3	0.7

8. ξ je število porabljenih nabojev, $\xi = 1, 2, 3, 4$

1	2	3	4
0.8	0.16	0.032	0.008

9. $\mathcal{B} = \{\text{s kocko vržemo } m \text{ pik}\}$, $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $P(\mathcal{B}) = p = 1/6$, $P(\mathcal{B}') = q = 5/6$.

a) $P = \binom{5}{2} \cdot (1/6)^2 \cdot (5/6)^3 = 625/3888$;

b) $P = 1 - \binom{5}{0} \cdot (1/6)^0 \cdot (5/6)^5 = 4651/7776$;

c) $P = \binom{5}{2} \cdot (1/6)^2 \cdot (5/6)^3 \cdot (1 - \binom{5}{0} (1/6)^0 \cdot (5/6)^5) = 91/7776$

10. $\mathcal{B} = \{\text{s tremi kockami vržemo } 16 \text{ pik}\}$, $P(\mathcal{B}) = 6/6^3 = 1/36$, $P(\mathcal{B}') = 35/36$.
 $P_n = \binom{n}{2} (1/36)^2 \cdot (35/36)^{n-2}$, $P_1 \doteq 0.245$, $P_2 \doteq 0.267$, $P_3 \doteq 0.275$, $P_4 \doteq 0.271$

11. $\mathcal{B} = \{\text{pri metu kovanca je padel grb}\}$, $P(\mathcal{B}) = 1/2$, $P(\mathcal{B}') = 1/2$.

a) $P = \binom{10}{3} (1/2)^{10} = 15/128$;

b) $P = 1 - (\binom{10}{0} \cdot (1/2)^{10} + \binom{10}{1} (1/2)^{10}) = 1013/1024$;

c) $P = \binom{3}{2} (1/2)^3 \cdot \binom{2}{2} (1/2)^2 \cdot (1 - \binom{5}{0} (1/2)^5) = 31/1024$

12. $P = \binom{5}{2} \cdot p^3 q^2 \doteq 0.322$, $p = 0.518$, $q = 0.482$

13. a) $P_1 \doteq 0.205$;

b) $P_2 \doteq 0.410$;

c) $P_3 \doteq 0.328$;

č) $P = P_1 + P_2 + P_3 \doteq 0.942$

14. $\mathcal{A} = \{\text{cilja ne zadenemo}\}$, $\mathcal{A}' = \{\text{cilj zadenemo vsaj enkrat}\}$, $P(\mathcal{A}) = \binom{8}{0} \cdot 0.1^0 \cdot 0.9^8 \doteq 0.43$, $P(\mathcal{A}') = 1 - P(\mathcal{A}) \doteq 0.57$

15. $\mathcal{A} = \{\text{cilj je zadet manj kot dvakrat}\}$, $\mathcal{A}' = \{\text{cilj je zadet vsaj dvakrat}\}$, $P(\mathcal{A}) = q^4 + \binom{4}{1} p q^3 \doteq 0.65$, $p = 0.3$, $q = 0.7$; $P(\mathcal{A}') = 1 - P(\mathcal{A}) \doteq 0.35$

16. $\mathcal{A} = \{\text{sovražno letalo ostane neporaženo}\}$, $\mathcal{H}_1 = \{\text{sovražnega letala ne zadene noben zadetek}\}$, $\mathcal{H}_2 = \{\text{sovražno letalo zadene en zadetek}\}$. $P(\mathcal{H}_1) = 0.4^4 = 0.0256$, $P(\mathcal{H}_2) = \binom{4}{1} \cdot 0.6^1 \cdot 0.4^3 = 0.1536$, $P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_1) = 1$, $P(\mathcal{A}|\mathcal{H}_2) = 0.3 \Rightarrow P(\mathcal{A}) = 0.07168$

17. $\mathcal{A} = \{\text{med } 100 \text{ kondenzatorji je po preteku } 10000 \text{ delovnih ur pokvarjenih več kot } 3\}$, $\mathcal{A}_0 = \{\text{med } 100 \dots \text{ ni noben pokvarjen}\}$, $\mathcal{A}_1 = \{\text{med } 100 \dots \text{ je natanko eden pokvarjen}\}$, $\mathcal{A}_2 = \{\text{med } 100 \dots \text{ sta natanko } 2 \text{ pokvarjena}\}$, $\mathcal{A}_3 = \{\text{med } 100 \dots \text{ so natanko } 3 \text{ pokvarjeni}\}$, $\mathcal{B} = \{\text{kondenzator se je po preteku } 10000 \text{ delovnih ur pokvaril}\}$.

$$P(\mathcal{B}) = 0.01, P(\mathcal{B}') = 0.99, P(\mathcal{A}_0) = 0.99^{100}, P(\mathcal{A}_1) = 100 \cdot 0.99^{99} \cdot 0.01,$$

$$P(\mathcal{A}_2) = \binom{100}{2} \cdot 0.99^{98} \cdot 0.01^2, P(\mathcal{A}_3) = \binom{100}{3} \cdot 0.99^{97} \cdot 0.01^3;$$

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3; P(\mathcal{A}') = P(\mathcal{A}_0) + P(\mathcal{A}_1) + P(\mathcal{A}_2) + P(\mathcal{A}_3) \doteq 0.9815, P(\mathcal{A}) = 1 - P(\mathcal{A}') \doteq 0.0185.$$

18. ξ je število izvlečenih belih krogel

$$P(\xi = k) = \binom{5}{k} (1/3)^k (2/3)^{5-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

0	1	2	3	4	5
0.132	0.329	0.329	0.165	0.041	0.004

19. ξ je število vrženih grbov: $P(\xi = k) = \binom{n}{k} (1/2)^n$

a) $n = 5$; $P(\xi = k) = \binom{5}{k} (1/2)^5$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

0	1	2	3	4	5
1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

b) $n = 6$; $P(\xi = k) = \binom{6}{k} (1/2)^6$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

0	1	2	3	4	5	6
1/64	6/64	15/64	20/64	15/64	6/64	1/64

20. ξ je število grbov pri metu treh kovancev

$P(\xi = k) = \binom{3}{k} (1/2)^3$, $k = 0, 1, 2, 3$

0	1	2	3
1/8	3/8	3/8	1/8

21. ξ je število točk pri streljanju v tarčo

$P(\xi = 10 \cdot k) = \binom{3}{k} 0.4^k \cdot 0.6^{3-k}$, $k = 0, 1, 2, 3$

0	10	20	30
0.216	0.432	0.288	0.064

22. ξ je število nepokvarjenih kamionov v določenem trenutku

$P(\xi = k) = \binom{6}{k} 0.8^k \cdot 0.2^{6-k}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

0	1	2	3	4	5	6
0.000	0.002	0.015	0.082	0.246	0.393	0.262

23. ξ je število metov v posamezni igri, $\xi = 1, 2, 3, \dots$: $P(\xi = n) = (1/2)^n$

24. ξ je število semaforjev do prvega postanka, $\xi = 0, 1, 2, \dots$: $P(\xi = n) = 0.5^{n+1}$

XVII/8. Poprečna vrednost in disperzija slučajne spremenljivke

1. $M(\xi_1) = 2.7$; $M(\xi_2) = 2.9$

2. $M(\xi_1) = M(\xi_2) = 0$; $D(\xi_1) = M(\xi_1^2) = 1.2$; $D(\xi_2) = M(\xi_2^2) = 1$

3. 1. $M(\xi) = 7$, $D(\xi) = 35/6$

2. $M(\xi) = 4.5$, $D(\xi) = 2.0$

3. $M(\xi) = 11/9$, $D(\xi) = 88/405$

4. $M(\xi) = 0.50$, $D(\xi) = 0.43$

5. $M(\xi) = 0.9$, $D(\xi) = 0.49$

6. $M(\xi) = 1.38$, $D(\xi) = 0.40$

7. $M(\xi) = 0.7$, $D(\xi) = 0.21$

8. $M(\xi) = 1.25$, $D(\xi) = 0.30$

18. $M(\xi) = n \cdot p = 5/3$, $D(\xi) = n \cdot p \cdot q = 10/9$

19. a) $M(\xi) = 5/2$, $D(\xi) = 5/4$

b) $M(\xi) = 3$, $D(\xi) = 3/2$

20. $M(\xi) = 3/2$, $D(\xi) = 3/4$

21. $M(\xi) = 12$, $D(\xi) = 7.2$

22. $M(\xi) = 4.8$, $D(\xi) = 0.96$

4.

0	1	2	3	4	5
1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

$M(\xi) = 2.5$; $D(\xi) = 1.25$

5.

0	1	2	3	4	5
1/32	12/32	11/32	5/32	2/32	1/32

$M(\xi) = 31/16$; $D(\xi) = 303/256$

6.

$\xi; \zeta$	1	2	3	4	5	6
$P(\xi)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$P(\zeta)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

$M(\xi) = 3.5$; $D(\xi) = 2.92$

$M(\zeta) = 4.47$; $D(\zeta) = 1.97$

7.

0	a	$2a$	$3a$
$4/16$	$6/16$	$4/16$	$2/16$

$M(\xi) = 1.25a$; $D(\xi) = 0.925a^2$

8. a)

0	a	$2a$	\dots	$(n-1)a$
$1/n$	$1/n$	$1/n$	\dots	$1/n$

$M(\xi) = (n-1)a/2$; $D(\xi) = a^2(n^2 - 1)/12$

b) $n = 2k$

0	a	$2a$	\dots	$(k-1)a$	ka
$1/(2k)$	$2/(2k)$	$2/(2k)$	\dots	$2/(2k)$	$1/(2k)$

$M(\xi) = (ka)/2$; $D(\xi) = a^2/(12(k^2 + 2))$

$n = 2k + 1$

0	a	$2a$	\dots	$(k-1)a$	ka
$1/(2k+1)$	$2/(2k+1)$	$2/(2k+1)$	\dots	$2/(2k+1)$	$2/(2k+1)$

$M(\xi) = ak(k+1)/(2k+1)$; $D(\xi) = a^2k(k+1)(k^2+k+1)/(3(2k+1)^2)$

9. ξ_i je najmanjše število potrebnih uteži pri tehtanju v i -tem sistemu

a) ξ_i	1	2	3	4	M
$P(\xi_1)$	0.4	0.4	0.2	—	$M(\xi_1) = 1.8$
$P(\xi_2)$	0.5	0.3	0.2	—	$M(\xi_2) = 1.7$
$P(\xi_3)$	0.4	0.3	0.2	0.1	$M(\xi_3) = 2.0$

b) ξ_i	1	2	M
$P(\xi_1)$	0.4	0.6	$M(\xi_1) = 1.6$
$P(\xi_2)$	0.5	0.5	$M(\xi_2) = 1.5$
$P(\xi_3)$	0.4	0.6	$M(\xi_3) = 1.6$

V obeh primerih je poprečno najmanjše število potrebnih uteži za tehtanje najmanjše pri drugem sistemu.

XVII/9. Preprost primer markovske verige

1. $P(2) = P(n) = P$.

2. $(p_{11} = p_{21}) \wedge (p_{12} = p_{22})$

3. z — zadenem, n — ne zadenem

$$P = \begin{vmatrix} p_{zz} & p_{zn} \\ p_{nz} & p_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 \end{vmatrix}$$

$$P(2) = \begin{vmatrix} 0.84 & 0.16 \\ 0.48 & 0.52 \end{vmatrix}, \quad P(3) = \begin{vmatrix} 0.804 & 0.196 \\ 0.588 & 0.412 \end{vmatrix}, \quad P(4) = \begin{vmatrix} 0.7824 & 0.2176 \\ 0.6528 & 0.3472 \end{vmatrix}$$

$$p_{nz}(2) = 0.48 \quad p_{nz}(3) = 0.588 \quad p_{nz}(4) = 0.6528$$

4. g -gre v gledališče, k -gre v kino

$$P = \begin{vmatrix} p_{gg} & p_{gk} \\ p_{kg} & p_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix}$$

$$P(2) = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{vmatrix}, \quad P(3) = \begin{vmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/8 & 5/8 \end{vmatrix}, \quad P(4) = \begin{vmatrix} 3/8 & 5/8 \\ 5/16 & 11/16 \end{vmatrix}$$

$$p_{kg}(2) = 1/4, \quad p_{kk}(3) = 5/8, \quad p_{kk}(4) = 11/16$$

5. \check{s} — Peter študira, n — ne študira

$$P = \begin{vmatrix} p_{\check{s}\check{s}} & p_{\check{s}n} \\ p_{n\check{s}} & p_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.3 & 0.7 \end{vmatrix}$$

$$P(2) = \begin{vmatrix} 0.28 & 0.72 \\ 0.27 & 0.73 \end{vmatrix}, \quad P(3) = \begin{vmatrix} 0.272 & 0.728 \\ 0.273 & 0.727 \end{vmatrix}$$

$$p_{\check{s}n}(2) = 0.72, \quad p_{\check{s}n}(3) = 0.728$$

6. d — stroj dela, s — stroj »stoji« — ne dela

$$P = \begin{vmatrix} p_{dd} & p_{ds} \\ p_{sd} & p_{ss} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 \end{vmatrix}$$

$$P(2) = \begin{vmatrix} 0.84 & 0.16 \\ 0.48 & 0.52 \end{vmatrix}$$

$$p_{dd}(2) = 0.84, \quad p_{ss}(2) = 0.52$$

7. z — zadenem, n — ne zadenem

$$P = \begin{vmatrix} p_{zz} & p_{zn} \\ p_{nz} & p_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & q \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix}$$

$$P(2) = \begin{vmatrix} p^2 + p_1q & \dots \\ pp_1 + p_1q_1 & \dots \end{vmatrix}, \quad p_{zz}(2) = 1, \quad p_{nz}(2) = a$$

$$p^2 + p_1q = 1, \quad pp_1 + p_1q_1 = a \Rightarrow p = 1, \quad p_1 = 1 - \sqrt{1 - a}$$

8. a) $p < p_1$, b) $p > p_1$, c) $q_1 > q$, č) $q > q_1$,

d) $p > p_1$, e) $p < p_1$, f) $p < p_1$, g) $q < q_1$

POPRAVKI

Stran	Naloga	Namesto	Mora biti
30	26.		dostavni pogoj $b > e$
31	32. č)	β	γ
	34. b)		dostavni pogoj $e > b$
45	24.	kotu	krogu
51	12.	Reši še naslednje sisteme:	Poišči realne rešitve sistemov enačb:
95	7.	nalogi 7.	nalogi 6.
99	5.	dve celi ničli 2 in 4	dve celi ničli 2 in —3
109	2. h)	$-\sqrt{(2) \cdot \cos 25^\circ}$	$-(\sin 20^\circ + \cos 20^\circ)$
	2. i)	$-\sqrt{(2) \cdot \cos 15^\circ}$	$-(\cos(\pi/6) + \sin(\pi/6))$
119	2. l)	$-\sqrt{(3)}$	$-2\sqrt{(3)}$
	6. g)	$\text{ctg}(45^\circ + x/2)$	$\text{ctg}(x/2)$
127	7. g)	$a = 12 \cdot 81$	$a = 12 \cdot 80$
128	10. č)	$\beta = 36^\circ 17', \gamma = 37^\circ 43'$	$\gamma = 32^\circ 51', \beta = 37^\circ 9'$
131	31.	$\sqrt{(429/24)}$	$\sqrt{(429)/24}$
133	54.	$P = b \cdot c \cdot \sin a/2 + (b + c) \cdot v$	$P = b \cdot c \cdot \sin a/2 + (b + c) \cdot v/2 =$ $= 12\sqrt{(2)} + 30\sqrt{(3)} + 6\sqrt{(35)}$
	61.	$V = 2\pi r^3 \sin a / \cos 3a$	$V = 2\pi r^3 \sin a / (3 \cos 3a)$
134	70.	$= (\pi/3) \dots$	$= (\pi/6) bc(b + c) \sin a \cdot \cos(a/2)$
136 } 137 }	5.	a) b) c) č) d) e) f)	$k = 0, k = 1, k = 2, k = 3,$ $k = 4, k = 6, k = 12$
139	11.	v zadnji vrsti mora biti	$k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$
152	13. b)	$B = 0, 1/2$	$B = 1/2$
154	23.	$4x^2 - 4xy + y^2 - 14x +$ $+ 7y + 12 = 0$	$16x^2 - 16xy + 4y^2 - 48x +$ $+ 24y + 35 = 0$
159	12. d)		$(2, 1), (1, 2), (2 \cdot 11064, -0 \cdot 73836);$
	12. e)		$(1, 2), (2, 1);$
	12. f)		$(-1, 3), (3, -1);$
	12. h)		$(3, -2), (-2, 3);$
	12. i)		$x^6 - 3x^5 + 10x^4 - 16x^3 - 57x^2 +$ $+ 239x - 390 = 0$
			$(3, -2), (-2, 3),$ $(2 \cdot 668346, -2 \cdot 596376),$ $(-2596376, 2 \cdot 66846);$
	12.	ostalo odpade	$(-2 \cdot 596376, 2 \cdot 66846);$

France Avsec, Aleksander Cokan, Ivan Molinaro, Ivan Pucelj,
Branko Roblek, Ivan Štalec in Marjan Vagaja

ZBIRKA VAJ iz aritmetike, algebre in analize
za 3. razred srednjih šol

Rokopis sta pregledala prof.dr. France Križanič
in prof. Ivan Molinaro, jezikovno pa p. prof. Marija Gerdina

Slike je izdelal Miha Štalec

Opremila Mira Kunaver

Izdalo Društvo matematikov, fizikov in astronomov
SR Slovenije

Urednik Ciril Velkovrh

Natisnila tiskarna Ljudske pravice
v Ljubljani 1986

Naklada 2000 izvodov

7. natis