

# Verjetnost in statistika 2023/24

1. kratko preverjanje, 23.10.2023

PRIIMEK IN IME: \_\_\_\_\_

Vsaka naloga je vredna 2 točki.

- Koliko različnih nizov črk dolžine 6 lahko sestavimo iz črk besede ANANAS, če:
  - ni dodatnih omejitev?
  - morajo nizi vsebovati podniz NN?
- Iz števk 0,2,4,5,7,8 sestavljamo petmestna števila. Koliko različnih števil lahko sestavimo, če:
  - se števke lahko ponavljajo?
  - morajo biti števila manjša od 45200 in se števke ne smejo ponavljati?
- Koliko je vseh štirimestnih števil  $abcd$ , če za števke velja  $1 < a < b < c < 7 < d$ ?
- Razložite enakost  $\frac{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  in naštejite še 3 lastnosti binomskih simbolov.
- V razredu je 12 deklet in 15 fantov. Naključno izberemo 4 različne osebe. Kakšna je verjetnost, da smo izbrali več deklet kot fantov?

Rešitev:

- a.  $\frac{6!}{3!2!} = 60$                       b.  $\frac{5!}{3!} = 20$  (NN si predstavljamo kot 1 znak).
- a.  $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6480$

b. Če je prva številka 2:                       $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$  možnosti

Če je prva 4 in druga 2 ali 0:               $2 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2) = 48$  možnosti

Če je prva številka 4, druga 5, potem je tretja 0 in zadnji dve poljubni: 6 možnosti

Skupaj 174 števil

- Za  $1 < a < b < c < 7$  si predstavljamo, da postavljamo 3 pregrade in 2 kroglici v predal, v katerem je že 5 kroglic: |oo \_\_ (a) o \_\_ (b) o \_\_ (c) o \_\_|, torej  $\frac{3+2}{3} = 10$  možnosti.  
Zlahka jih tudi naštejemo: 234, 235, 236, 245, 246, 256, 345, 346, 356, 456.

Za d pa imamo dve možnosti 8 ali 9 neodvisno od ostalih. Skupaj torej 20 možnosti.

- Simbol  $\frac{n}{k}$  pomeni število neurejenih izborov  $k$  objektov izmed  $n$  različnih. Lahko si predstavljamo, da  $n$  objektov postavimo v vrsto (na  $n!$  možnih načinov) in izberemo prvih  $k$ . Ker vrstni red izbora ni pomemben, delimo s  $k!$  (pozabimo vrstni red izbranih) in z  $(n-k)!$  (pozabimo vrstni red neizbranih), da dobimo izraz na desni.

Zanimivejše lastnosti so npr.  $\frac{n}{k} = \frac{n}{n-k} \cdot \frac{n}{k} + \frac{n}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}$ ,  $k \frac{n}{k} = n \frac{n-1}{k-1}$ .

$$\frac{\frac{12}{3} \frac{15}{1} + \frac{12}{4}}{\frac{27}{4}} = \frac{253}{1170} = 0,216.$$

# Verjetnost in statistika 2023/24

2. kratko preverjanje, 8.11.2023

PRIIMEK IN IME: \_\_\_\_\_

Vsaka naloga je vredna 2 točki.

- [2 točki] Dopolnite definicijo: Naj bo  $S$  neprazna množica izidov in  $F \subseteq 2^S$  algebra dogodkov. Verjetnost je funkcija  $P: \underline{\hspace{2cm}}$ , za katero velja:
- [2 točki] Vržemo dve pošteni kocki. Naj bo  $A$  dogodek, da pade 6 pik na prvi kocki, in  $B$  dogodek, da pade 6 pik na drugi kocki. Označite pravilne trditve:
  - Vseh dogodkov je 36.
  - Dogodek  $A$  je sestavljen dogodek.
  - Dogodka  $A$  in  $B$  sta nezdružljiva.
  - Dogodka  $A$  in  $B$  sta neodvisna.
- [2 točki] Puščico streljamo v okroglo tarčo s polmerom 1. Tarči je včrtan kvadrat. Kakšna je verjetnost, da puščica zadane notranjost kvadrata? (Privzemi, da so vse točke tarče enakovredne, in da puščica tarčo vedno zadane).
- [2 točki] Ana in Bojan mečeta kovanec z verjetnostjo grba  $p=3/4$ . Če pade grb, dobi Ana 1 točko, če pade cifra, dobi Bojan 2 točki. Zmaga tisti, ki prvi zbere 2 točki.
  - Določite verjetnosti za zmago vsakega igralca.
  - Koliko bi moral biti  $p$ , da bi bili verjetnosti zmage enaki za oba?
- [2 točki] Petkrat zapored vržemo pošteni kovanec.
  - Kakšna je verjetnost, da padejo vsaj 3 grbi?
  - Kakšna je verjetnost, da v prvem ali zadnjem metu pade grb?

Rešitev:

- Verjetnost je funkcija  $P: F \rightarrow R$ , ki je nenegativna, normirana in števno aditivna (natančno izpisati!)
- Pravilni sta b (saj ta dogodek vsebuje 6 izidov) in d (saj je  $P(AB) = P(A)P(B) = 1/36$ ).
- $2/\pi$ .
- $P(A) = P(cc) = (1-p)^2 = 9/16$ ,  $P(B) = P(g, cg) = p + p(1-p) = 7/16$ , če je  $p = 3/4$ . Enakost velja za  $p = \sqrt{2}/2$ .
- Verjetnost vsaj treh grbov je 0,5 zaradi simetrije. Lahko pa tudi izračunamo  $\frac{\binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}}{2^5} = 0,5$ . Verjetnost prvi ali zadnji grb je po principu vključitve in izključitve enaka  $P(G_1) + P(G_5) - P(G_1G_5) = 1/2 + 1/2 - 8/32 = 3/4$ .

## Verjetnost in statistika 2023/24

3. kratko preverjanje, 22.11.2023

PRIIMEK IN IME: \_\_\_\_\_

Vsaka naloga je vredna 2 točki.

1. [1 točka] Dokaži: če je  $P(B) = P(A)$ , potem sta dogodka  $A, B$  neodvisna.
2. [2 točki] Katere od naslednjih družin za smiselno izbrane vrednosti  $i$  predstavljajo popoln sistem dogodkov za poskus »vržemo 3 kocke«?
  - a)  $A_i \equiv$  pade natanko  $i$  šestic
  - b)  $A_i \equiv$  pade šestica na  $i$ -ti kocki
  - c)  $A_i \equiv$  pade vsota pik  $i$
  - d)  $A_i \equiv$  pade natanko  $i$  različnih vrednosti
3. [3 točke] Za dogodke  $A, B, C$  velja naslednje:
  - a) Dogodka  $A$  in  $B$  sta neodvisna.
  - b) Dogodka  $A$  in  $C$  sta nezdružljiva.
  - c) Dogodka  $B$  in  $C$  sta enako verjetna.
  - d) Verjetnost, da se zgodi vsaj eden od  $A$  in  $C$ , je enaka  $0,7$ .
  - e) Verjetnost, da se hkrati zgodita  $A$  in  $B$ , je enaka  $0,1$ .
  - f) Verjetnost dogodka  $C$  je manjša od  $0,5$ .Določi verjetnosti dogodkov  $A, B, C$ .
4. [2 točki] Imamo 10 kock, 9 poštenih in eno goljufivo, pri kateri pade šestica z verjetnostjo  $0,5$ , ostale vrednosti pa so enako verjetne. Izberemo naključno kocko in jo vržemo štirikrat zapored. Vselej pade šestica. Kakšna je verjetnost, da je izbrana kocka goljufiva?
5. [2 točki] Imamo 10 posod. V treh so v vsaki 3 bele in 2 črni krogli, v petih so v vsaki 4 bele in 3 črne, v dveh pa je po 1 bela in 5 črnih krogel. Izberemo naključno posodo in brez vračanja izvlečemo 3 krogel. Dobimo 1 belo in 2 črni. Kakšna je verjetnost, da sta bili v izbrani posodi 2 črni krogli?

## Verjetnost in statistika 2023/24

4. kratko preverjanje, 20.12.2023

PRIIMEK IN IME: \_\_\_\_\_

Za vsako od naslednjih diskretnih slučajnih spremenljivk  $X$  določi njen tip in parametre, nato izračunaj verjetnost  $P(3 \leq X \leq 5)$  in pričakovano vrednost  $E(X)$ . Vsaka naloga je vredna 2 točki.

Za izračune lahko uporabljaš GeoGebro in tabelo DSS. Rezultate zapiši na 3 decimalna mesta natančno. Čas pisanja je 15 minut (strogo!)

1. Strelec zadane eno od tarč, oštevilčenih s številkami od 1 do 8.  $X$  je številka zadete tarče.
2. V ribniku je 12 postrvi in 18 krapov. Ribič 4x zapored ulovi naključno ribo in jo vrne v ribnik.  $X$  je število ulovljenih postrvi.
3. Pošteno kocko mečemo do prve šestice.  $X$  je število padlih nešestic.
4. Janez dobi v povprečju 2,3 e-maile na uro.  $X$  je število e-mailov, ki jih bo prejel naslednjo uro.
5. V razredu je 12 fantov in 8 deklet. Učitelj izbere naključnih 5 oseb.  $X$  je število deklet.

Odgovori:

1. Enak(8),  $3/8$ ,  $9/2$
2. Bin(4,  $2/5$ ), 0.179, 1.6
3. Pas(1,  $1/6$ ), 0.244, 5
4. Poiss(2.3), 0.374, 2.3
5. HGeo(5, 20, 8), 0.296, 2

# Verjetnost in statistika 2023/24

5. kratko preverjanje, 10.01.2024

PRIIMEK IN IME: \_\_\_\_\_

Za izračune lahko uporabljate GeoGebro in 1 list A4 z izpiski. Rezultate zapišite na 3 decimalna mesta natančno.

1. [6 točk] Dana je gostota neke zvezne slučajne spremenljivke

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & a < x \leq 0, \\ 1-x, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

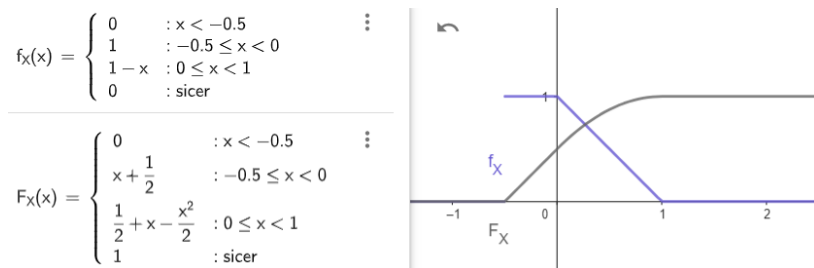
- a) Določite vrednost  $a$  ter skicirajte  $f_X$  in  $F_X$ .  
b) Izračunajte  $E(X)$ ,  $Med(X)$ ,  $Mod(X)$ .

2. [1 točka] Rezultati NPZ so normalno porazdeljeni s povprečjem 73 točk in standardnim odklonom 11, test je pisalo 15000 učencev. Koliko učencev je doseglo vsaj 90 točk? (Zaokroži na celo število).

3. [3 točke] Za dano slučajno spremenljivko določite verjetnost  $P(2 \leq X \leq 3)$ .

- a)  $X \sim U(1,9)$   
b)  $X \sim Exp(3)$   
c)  $X \sim N(3, 0.25)$

Rešitev:



1. a)  $a = -1/2$ ,

b)  $Med(X) = 0, Mod(X) = \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$  (vsaka točka na intervalu),  $E(X) = \frac{1}{24} = 0,042$ .

2.  $P(X \geq 90) = 0,06112 = 917$

3. a)  $1/8$       b)  $0,0023$  (GGB)      c)  $0.477$  (GGB)