Matematika v naravoslovju
vaje 7

Vsebina: risanje grafov

1. Dane so funkcije

   (a) $f(x) = x^4 - x^2$

   (b) $f(x) = \frac{x^3-3x+2}{x^2+1}$

   (c) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

   (d) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

   (e) $f(x) = x \ln^2(x)$

   (f) $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

   (g) $f(x) = x^{-2}\ln(x)$

   (h) $f(x) = e^{\cos(x)} - \sqrt{e}$

   Čim bolj natančno narišite njihove grafe (določite definicijsko območje, ničle, pole, asimptote, lokalne ekstreme, intervale naraščanja in padanja, periodičnost ter zalogo vrednosti).

Rešen primer: $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

- <u>ničle</u>: $x = 0$ Ker $\ln 0$ ne obstaja, funkcija f nima ničel.
- <u>poli</u>: $\ln x = 0 \iff x = 1$
- <u>definicijsko območje</u>: Zaradi logaritma je $x > 0$, zaradi ulomka (poli) pa $x \neq 1$. Sledi

$$D_f = (0, \infty) \setminus \{1\}.$$

- <u>odvod</u>:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2(x)} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2(x)}$$

- <u>stacionarne točke</u>: $f'(x) = 0 \iff \ln x - 1 = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e$
Na intervalu $(0, 1)$ je predznak odvoda negativen, zato tam funkcija pada.
Na intervalu $(1, \infty)$ je predznak odvoda pozitiven, zato tam funkcija narašča.
Ker funkcija pred stacionarno točko $x = e$ pada, potem pa narašča, ima funkcija v točki $x = e$ lokalni minimum.
Izračunamo še vrednost funkcije v $x = e$: $f(e) = \frac{e}{\ln e} = e$. Funkcija f torej doseže lokalni minimum v točki $A(e, e)$.
- <u>zaloga vrednosti</u>: Poglejmo, kaj se dogaja s funkcijo, ko gre $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} \overset{\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$$

Ko gre $x \to 0$, gre $f(x) \to 0$. Potem funkcija pada in se zato v $-\infty$ približa polu $x = 1$. Pol je lihe stopnje, funkcija še vedno pada, dokler v točki A ne doseže lokalnega minimuma. Za $x > e$ funkcija narašča v ∞. Zaloga vrednosti je torej

$$Z_f = (-\infty, 0) \cup [e, \infty)$$

- <u>graf</u>: