

# TEHNIŠKA MATEMATIKA

## VAJE 13

Vsebina: uporaba dvojnega integrala

**POLARNE KOORDINATE**

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$$

$D$  območje integracije v kartezičnih koordinatah  
 $D'$  območje integracije v polarnih koordinatah

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) J \, dr d\varphi$$

- Določite meje integracije in izračunajte integral, ki določa ploščino lika, omejenega s krivuljama  $y = x^2$  in  $y = x + 2$
- Izračunajte prostornino telesa, ki ga tvori ploskev s predpisom  $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$  nad pravokotnim območjem, omejenim s točkami  $(0, 0)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(3, 2)$  in  $(0, 2)$ .
- Izračunajte prostornino telesa, omejenega s ploskvijo  $x + y + z = 1$ , kjer velja  $x, y, z \geq 0$ .
- Izračunajte prostornino telesa, ki leži nad območjem, omejenim z  $y = \frac{2}{3}x$  in  $y = 2\sqrt{x}$  in pod ploskvijo, določeno z grafom funkcije  $f(x, y) = 2yx^2 + 9y^3$ .
- Izračunajte prostornino telesa, omejenega s ploskvijo  $f(x, y) = x - y + 4$  nad območjem  $D$ , ki ga določa krožnica z enačbo  $x^2 + y^2 \leq 1$ .
- Izračunajte prostornino telesa, omejenega s ploskvijo  $f(x, y) = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}$  na območju  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 16\}$ .
- Izračunajte prostornino dela valja, omejenega s ploskvijo  $z = xy$  nad območjem  $D$ , ki ga določa polkrog  $x^2 + y^2 \leq 2x$ .
- Izračunajte prostornino telesa, omejenega s ploskvijo  $f(x, y) = x^2$  nad območjem  $D$ , ki ga določa krožnica s središčem v točki  $S(2, 0)$  in polmerom 2. Upoštevajte, da velja

$$\int \cos^6 x \, dx = \frac{1}{6} \cos^5 x \sin x + \frac{5}{16} x + \frac{5}{24} \sin 2x + \frac{5}{192} \sin 4x + C.$$