

TEHNIŠKA MATEMATIKA

VAJE 14

Vsebina: uporaba trojnega integrala

CILINDRIČNE KOORDINATE

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad z = z$$

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$$

D območje integracije v kartezičnih koordinatah

D' območje integracije v cilindričnih koordinatah

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{D'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) J \, dr d\varphi dz$$

SFERNE KOORDINATE

$$x = r \sin \varphi \cos \vartheta \quad y = r \sin \varphi \sin \vartheta \quad z = r \cos \varphi$$

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\vartheta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \sin \vartheta & -r \sin \varphi \cos \vartheta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \varphi$$

D območje integracije v kartezičnih koordinatah

D' območje integracije v sfernih koordinatah

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{D'} f(r \sin \varphi \cos \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \varphi) J \, dr d\varphi d\vartheta$$

1. Izračunajte prostornino telesa, omejenega z ravnino $x + z = 1$ in ravnino $z = 0$ v mejah $x = 0$, $x = 1$ in $y = 0$, $y = 1$.
2. Izračunajte trojni integral funkcije $f(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y^2}$ na območju D , ki naj bo pokončni pol valj med $z = 0$ in $z = 1$, osnovna ploskev na ravnini $z = 0$ pa je polkrog, ki ga omejuje krožnica z enačbo $y = \sqrt{2x - x^2}$.
3. Izračunajte prostornino telesa, ki ga omejujeta ploskvi z enačbama $(x - 1)^2 + y^2 = z$ in $2x + z - 2 = 0$.
4. Izračunajte trojni integral funkcije $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, kjer je $-2 \leq x \leq 2$, $-\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$, $0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.
5. Izračunajte prostornino telesa, ki ga omejuje ploskev z enačbo $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = xyz$.
6. Izračunajte prostornino telesa, ki ga omejuje ploskev z enačbo $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 27z$.