

**Društvo matematikov, fizikov  
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19  
1000 Ljubljana

# **Tekmovalne naloge DMFA Slovenije**

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis, kopiranje in uporabo gradiva v tem dokumentu za potrebe učiteljev pri pouku, šolskih krožkih in drugih aktivnostih na šoli, povezanimi s tekmovanji v organizaciji DMFA Slovenije. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Referenčna koda datoteke je zapisana ob vsaki strani tega dokumenta.

## Rešitve nalog za skupino I

**N1.**  $m = 1,0 \text{ kg}$ ,  $V = 4,0 \text{ L}$ ,  $\rho_0 = 1,0 \text{ kg/L}$ ,  $\rho_c = 1,0 \text{ kg/L}$ .

**(a) 3 točke**

V ravnovesju sta vzgon in teža žoge nasprotno enaka oziroma po velikosti enaka

$$F_{va} = F_g \quad \text{oziroma} \quad \rho_0 V_a g = mg,$$

kjer je  $V_a$  iskana prostornina potopljenega dela žoge. Dobimo

$$V_a = \frac{m}{\rho_0} = 1,0 \text{ L}.$$

..... TOČKOVANJE .....

- 1: *izenačitev vzgona in teže (prva enačba)*
- 1: *pravilna izraza za vzgon in težo (druga enačba)*
- 1: *pravilen izraz ali pravilna vrednost za  $V_a$*

**(b) 4 točke**

Žoga je potopljena do polovice,  $V_b = \frac{1}{2}V$ . Vzgon je večji kot pri **a)**, torej moramo na žogo delovati z dodatno silo  $F_b$  **navzdol**. Za velikosti sil velja

$$F_{vb} = F_g + F_b \quad \text{oziroma} \quad \rho_0 V_b g = mg + F_b.$$

Končno dobimo

$$F_b = \rho_0 V_b g - mg = 9,8 \text{ N}.$$

..... TOČKOVANJE .....

- 1: *ugotovitev, da sila  $F_b$  deluje navzdol*
- 1: *zapis ravnovesja sil*
- 1: *pravilen izraz za  $F_b$*
- 1: *pravilna vrednost  $F_b$*

**(c) 3 točke**

Silo, ki potiska žogo v vodo v delu **b)** povzroči utež iz aluminija z maso  $m_c$ . Upoštevati moramo tudi vzgon, ki deluje na utež s prostornino  $V_c$ . Z  $F_c$  označimo velikost teže uteži in z  $F_{vc}$  velikost vzgona na utež. Ravnovesje sil se zapiše kot

$$F_{vb} + F_{vc} = F_g + F_c \quad \text{oziroma} \quad \rho_0 V_b g + \rho_0 V_c g = mg + m_c g.$$

Upoštevamo še, da maso in prostornino uteži povezuje enačba  $m_c = V_c \rho_c$ , in končno dobimo

$$V_c = \frac{V_b \rho_0 - m}{\rho_c - \rho_0} = (V_b - V_a) \frac{\rho_0}{\rho_c - \rho_0} = 588 \text{ cm}^3 \approx 0,59 \text{ L}.$$

..... TOČKOVANJE .....

- 1: *zapis ravnovesja sil*
- 1: *zveza med maso in prostornino uteži*
- 1: *pravilen izraz ali pravilna vrednost za  $V_c$*

**N2.**  $m_1 = 800 \text{ g}$ ,  $v_1 = 2,0 \text{ m/s}$ ,  $m_2 = 400 \text{ g}$ ,  $v_2 = 3,5 \text{ m/s}$ ,  $k = 3,0 \text{ N/cm}$ .

**(a) 3 točke**

Ko je vzmet najbolj skrčena, avtomobilček glede na voziček miruje, kar pomeni, da imata voziček in avtomobilček enako hitrost  $u_a$ . Ohranitev gibalne količine nam da

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u_a \quad \text{oziroma} \quad u_a = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Hitrost  $u_a$  je hitrost težišča celotnega sistema voziček-avtomobilček.

..... TOČKOVANJE .....

- 1: *ugotovitev, da sta hitrosti avtomobilčka in vozička enaki*
- 1: *pravilna enačba za ohranitev gibalne količine*
- 1: *pravilen izraz ali pravilna vrednost za  $u_a$*

**(b) 3 točke**

V sistemu avtomobilček-vzmet-voziček se energija ohranja. Razlika začetne kinetične energije  $W_z$  in kinetične energije  $W_k$ , ko je vzmet najbolj skrčena, je shranjena kot prožnostna energija vzmeti  $W = \frac{1}{2} k x^2$ , kjer je  $x$  iskani skrček vzmeti. Ohranitev energije  $W_z = W_k + W$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u_a^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

nam da

$$k x^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2) \left( \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \right)^2$$

in

$$x = (v_2 - v_1) \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}} = 4,47 \text{ cm} \approx 4,5 \text{ cm}.$$

..... TOČKOVANJE .....

- 1: *ugotovitev, da se razlika kinetičnih energij pretvori v prožnostno energijo*
- 1: *pravilen izraz za ohranitev energije*
- 1: *pravilen izraz ali pravilna vrednost za  $x$*

**(c) 4 točke**

Po odboju se vsa prožnostna energija pretvori nazaj v kinetično. Celoten dogodek lahko zato obravnavamo kot prožen trk. Končni hitrosti vozička  $u_1$  in avtomobilčka  $u_2$  lahko rešimo z reševanjem sistema dveh enačb, ene za ohranitev gibalne količine

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

in ene za ohranitev energije

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2.$$

Z nekaj matematične telovadbe dobimo, na primer

$$v_2 + u_2 = u_1 + v_1$$

in

$$v_2 - u_2 = \frac{m_1}{m_2} (u_1 - v_1).$$

Enačbi seštejemo, da se znebimo  $u_2$ , in dobimo

$$2m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u_1 + (m_2 - m_1) v_1 \quad \text{oziorama} \quad u_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 3,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Elegantnejša pot do rešitve upošteva simetrijo dogajanja pred in po tem, ko je vzmet najbolj skrčena in imata obe vozili hitrost težišča sistema  $u_a$ .

Lahko upoštevamo, da se v težiščnem sistemu, ki se giblje s hitrostjo  $u_a$ , po prožnem trku telesoma zgolj obrneta predznaka hitrosti. Ker se je glede na težišče pred trkom voziček gibal s hitrostjo  $v_1 - u_a = \Delta u = -0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , se po trku glede na težišče giblje s hitrostjo  $u_1 - u_a = -\Delta u = +0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , kar nam da rezultat  $u_1 = u_a - \Delta u = 3,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Uporabi težiščnega sistema se lahko izognemo še z nekoliko drugačnim razmislekom. Med stiskanjem vzmeti je vzmet na voziček delovala s sunkom sile, označimo ta sunek kot  $\int F dt$ . Ko se je vzmet raztezala in odrivala avtomobilček je zaradi simetričnega dogajanja vzmet na voziček še enkrat delovala z enako velikim sunkom sile. Prvi sunek sile je povzročil spremembo gibalne količine vozička

$$\Delta G_1 = m_1 (u_a - v_1) = \int F dt.$$

Med odzivom avtomobilčka po tem, ko je vzmet najbolj skrčena, je voziček doživel natanko enako spremembo gibalne količine

$$\Delta G_2 = m_1 (u_1 - u_a) = \Delta G_1,$$

kar nam da enako rešitev

$$u_1 = u_a + (u_a - v_1) = 3,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

..... TOČKOVANJE .....

- 1: enačba za ohranitev gibalne količine ali omemba težiščnega sistema  
 1: enačba za ohranitev energije ali omemba simetrije pred in po stanju v delu (a)  
 1: delno reševanje sistema enačb ali omemba razlike hitrosti  $u_a - v_1 = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$   
 1: pravilen izraz ali pravilna vrednost za  $u_1$

**N3.**  $t_0 = 2,0 \text{ s}$ ,  $a = 3,0 \text{ m/s}^2$ ,  $v_0 = 60 \text{ km/h} = 16,7 \text{ m/s}$ ,  $s = 60 \text{ m}$ .

Uvodni razmislek: Z  $x$  označujemo oddaljenost motorista od semaforja. Dokler sveti na semaforju, ki se mu približuje motorist, zelena luč, obstajajo trije različni režimi vožnje:

- I. Ko je dovolj daleč od semaforja ( $x > x_a$ ), vozi zaradi omejitve hitrosti s hitrostjo  $v_0$ .
- II. Ko je tako blizu semaforja  $x < x_b$ , da lahko s svojo trenutno hitrostjo  $v(x)$  zagotovo pripele do semaforja v času  $t_0$ , kolikor sveti rumena luč pred rdečo, se s konstantno hitrostjo  $v(x_b)$  pelje do semaforja in naprej.
- III. V vmesnem območju  $x_b < x < x_a$  mora voziti s tako hitrostjo, da bi se lahko v času  $t_0$  pri zaviranju s pojemkom  $a$  ustavil točno pri semaforju.

**(a) 4 točke**

V tem delu naloge dejansko iščemo oddaljenost od semaforja  $x_a$ , ko mora začeti zavirati. Zavirati mora začeti na razdalji  $x_a$ , za katero ugotovi, da bi v primeru, da bi imel bližje semaforja ( $x < x_a$ ) hitrost  $v_0$ , s pojemkom  $a$  ne mogel več ustaviti ob semaforju. Za pot  $x_a$ , ki jo opravi med ustavljanjem s pojemkom  $a$ , če ima na začetku hitrost  $v_0$ , velja enačba

$$0 = v_0^2 - 2ax_a \quad \text{oziroma} \quad x_a = \frac{v_0^2}{2a} = 46,296 \text{ m} \approx 46,3 \text{ m}.$$

..... TOČKOVANJE .....

- 1: ugotovitev, da obstajata režima I. in III.
- 1: ugotoviti pogoj za  $x_a$ ; da s hitrostjo  $v_0$  v času  $t_0$  še lahko ustavi pred semaforjem
- 1: pravilna enačba, ki povezuje  $x_a$ ,  $v_0$  in  $a$
- 1: pravilen izraz ali pravilna vrednost za  $x_a$

**(b) 6 točk**

Ker je  $x_a < s$  bo motorist, če mu ne bo treba ustaviti zaradi rdeče luči, med vožnjo do semaforja vozil v vseh treh režimih, omenjenih v uvodu. Mejo  $x_a$  že poznamo, poiskati moramo še mejo  $x_b$  med režimoma II. in III.. Ko je bližje semaforju kot  $x_a$ , zavira s pospeškom  $a$ . Za njegovo hitrost, ko je za  $x$  oddaljen od semaforja in je med zaviranjem prevozil pot  $x_a - x$ , takrat velja

$$v^2(x) = v_0^2 - 2a(x_a - x) = v_0^2 - 2a\frac{v_0^2}{2a} + 2ax \quad \text{oziroma} \quad v^2(x) = 2ax.$$

Pogoj za prehod iz režima zaviranja (režim III.) v režim enakomerne vožnje do semaforja (režim II.) je, da s hitrostjo  $v(x_b)$  v času  $t_0$  pripelje do semaforja. Torej mora veljati  $x_b = v(x_b)t_0$ , pri čemer je  $v(x_b)$  hitrost, izračunana v režimu III., ko enakomerno zavira. Dobimo

$$x_b = t_0\sqrt{2ax_b} \quad \text{oziroma} \quad x_b = 2at_0^2 = 24,0 \text{ m}.$$

Hitrost, s katero prevozi zadnjih  $x_b$  poti pred semaforjem, je  $v_b = x_b/t_0 = 2at_0 = 12,0 \text{ m/s}$ . Zdaj lahko izračunamo čase za pot po posameznih odsekih in celotni čas potovanja od oddaljenosti  $s$  od semaforja. Celotni čas je  $t = t_I + t_{II} + t_{III}$ , kjer je čas potovanja v režimu I. (vozi s hitrostjo  $v_0$ )

$$t_I = \frac{s - x_a}{v_0} = 0,82 \text{ s},$$

čas potovanja v režimu II. (sledi direktno iz naloge) je  $t_{II} = t_0 = 2,0 \text{ s}$ , in čas potovanja v režimu III. (zavira s pojemkom  $a$  od hitrosti  $v_0$  do hitrosti  $v_b$ )

$$t_{III} = \frac{v_0 - v_b}{a} = 1,56 \text{ s}.$$

Celoten čas vožnje je  $t = t_I + t_{II} + t_{III} = 4,38 \text{ s} \approx 4,4 \text{ s}$ .

- ..... TOČKOVANJE .....
- 1 : ugotovitev, da bo vozil v vseh treh režimih
  - 1 : pravilen izraz za  $v(x)$  v režimu zaviranja (režim III.)
  - 1 : ugotovitev pogoja za prehod iz režima III. v II.
  - 1 : izračun meje  $x_b$
  - 1 : pravilni izrazi za trajanje vožnje za vse tri režime
  - 1 : pravilen izraz ali pravilna vrednost za čas  $t$

## Rešitve nalog za skupino II

**N1.**  $U_0 = 9,0 \text{ V}$ .

**(a) 4 točke**

Z grafa odčitamo, da je pri napetosti  $U_0$  tok skozi žarnico  $I_a = 550 \text{ mA} \pm 5 \text{ mA}$ . Od tu izračunamo iskani količini

$$R_a = \frac{U_0}{I_a} = 16,364 \Omega \approx 16,4 \Omega.$$

in

$$P_a = U_0 I_a = 4,95 \text{ W} \approx 5,0 \text{ W}.$$

Ker tok odčitavamo z negotovostjo  $\pm 5 \text{ mA}$ , štejemo kot ustrezne za  $R_a$  vrednosti med vključno  $16,2 \Omega$  in  $16,5 \Omega$ . Ustrezne vrednosti za moč  $P_a$  so podobno med vključno  $4,9 \text{ W}$  in  $5,0 \text{ W}$ .

..... TOČKOVANJE .....

- 1: *odčitana vrednost toka pri  $U_0$  med 540 mA in 560 mA*
- 1: *pravilen izraz za  $R_a$*
- 1: *pravilen izraz za  $P_a$*
- 1: *obe vrednosti  $R_a$  in  $P_a$  znotraj zgoraj določenih intervalov*

**(b) 2 točki**

Ko dve žarnici vezemo vzporedno, tok skozi vsako poganja napetost  $U_0$  in je tok skozi vir vsota tokov  $I_a$

$$I_b = 2I_a = 1,1 \text{ A}.$$

Kot ustrezne štejemo vrednosti med  $1,08 \text{ A}$  in  $1,12 \text{ A}$ .

..... TOČKOVANJE .....

- 1: *ugotovitev, da moramo podvojiti tok iz dela (a)*
- 1: *pravilna vrednost  $I_b$  znotraj zgoraj določenega intervala*

**(c) 2 točki**

Enaki žarnici sta vezani zaporedno, zato se napetost razdeli enakomerno, na vsaki  $U_c = 4,5 \text{ V}$ . Tok skozi žarnici in skozi vir odčitamo z grafa pri  $U_c$ . Vrednost toka je  $I_c = 460 \text{ mA} \pm 5 \text{ mA}$ .

..... TOČKOVANJE .....

- 1: *ugotovitev, da je na vsaki žarnici napetost  $U_c = \frac{1}{2}U_0$*
- 1: *odčitana vrednost toka pri  $U_c$  med 450 mA in 470 mA*

**(d) 2 točki**

Moč na posamezni žarnici izračunamo kot

$$P_d = I_c U_c = 2,07 \text{ W}.$$

Kot ustrezne štejemo vrednosti  $P_d$  med vključno  $2,0 \text{ W}$  in  $2,1 \text{ W}$ .

..... TOČKOVANJE .....

- 1: *pravilen izraz za moč*
- 1: *pravilna vrednost  $P_d$  znotraj zgoraj določenega intervala*

**N2.**  $m = 10 \text{ g}$ ,  $x = 20 \text{ cm}$ ,  $R = 1,0 \Omega$ ,  $R_n = 0,10 \Omega$ ,  $U_0 = 4,5 \text{ V}$ ,  $U_c = 6,0 \text{ V}$ .

**(a) 2 točki**

Za uravnoteženje teže debele žice bo potrebno najmanjše polje, kadar bo magnetna sila kazala navpično navzgor. Od tu sklepamo, da mora biti magnetno polje vodoravno in hkrati pravokotno na debelo žico. Da bo smer magnetne sile kazala navpično, mora biti magnetno polje usmerjeno od debele žice proti žici, v katero je vezan vir.

..... TOČKOVANJE .....

- 1: *ugotovitev, da mora biti magnetno polje vodoravno*  
 1: *jasno označena ali opisana smer polja od debele žice proti viru pravokotno na debelo žico*

**(b) 4 točke**

Ravnovesje je doseženo, ko je magnetna sila  $F_b$  po velikosti enaka teži debele žice  $F_g$ . Ker je smer polja taka, kot smo ugotovili v delu **(a)**, velja

$$F_b = F_g \quad \text{oziroma} \quad I_b x B_b = mg.$$

Tok  $I_b$  po zanki določa Ohmov zakon

$$U_0 = I_b(R_n + R) \quad \text{oziroma} \quad I_b = \frac{U_0}{R_n + R}$$

od koder dobimo

$$B_b = \frac{mg}{xI_b} = \frac{mg(R_n + R)}{xU_0} = 119,8 \text{ mT} \approx 120 \text{ mT}.$$

..... TOČKOVANJE .....

- 1: *ugotovitev, da silo teže uravnoteži magnetna sila*  
 1: *pravilen zapis enačbe za ravnovesje sil*  
 1: *pravilen izraz za tok po zanki*  
 1: *pravilen izraz ali pravilna vrednost za  $B_b$*

**(c) 4 točke**

Ker povečamo napetost na  $U_c$ , je magnetna sila  $F_c$  večja od teže  $F_g$ . Debela žica se v prvem trenutku pospešeno dviga navpično navzgor. Pospešek določa 2. Newtonov zakon

$$ma = F_c - F_g \quad \text{oziroma} \quad a = \frac{F_c}{m} - g.$$

Ker so vse okoliščine razen gonilne napetosti vira enake kot v delu **(b)** velja zveza

$$\frac{F_c}{F_b} = \frac{U_c}{U_0} \quad \text{oziroma} \quad F_c = F_b \frac{U_c}{U_0} = F_g \frac{U_c}{U_0}.$$

Od tu dobimo enostaven izraz za pospešek debele žice

$$a = \frac{F_g \frac{U_c}{U_0}}{m} - g = \frac{mgU_c}{mU_0} - g = g \frac{U_c - U_0}{U_0} = 3,27 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 3,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

..... TOČKOVANJE .....

- 1: *ugotovitev, da se debela žica premakne navzgor*  
 1: *pravilen zapis 2. Newtonovega zakona za debelo žico*  
 1: *pravilen izraz za  $a$*   
 1: *pravilna vrednost  $a$*



**N3.**  $\Delta T = 5,0^\circ\text{C} = 5,0\text{ K}$ ,  $V_0 = 1,0\text{ L}$ ,  $m_0 = 500\text{ g}$ ,  $\beta = 6,0\text{ m/min}$ ,  $\rho_V = 1,00\text{ g/L}$ ,  $\rho_L = 910\text{ g/L}$ ,  $h = 12,5\text{ cm}$ ,  $S_0 = 80\text{ cm}^2$ ,  $d = 1,0\text{ mm}$ ,  $\lambda = 0,040\text{ W/m K}$ ,  $q_t = 334\text{ kJ/kg}$ ,  $p_0 = 94\text{ kPa}$ ,  $z_0 = 7,8\text{ km}$ ,  $\Delta p_c = 25\text{ kPa}$ .

**(a) 8 točk**

Ob vznožju plastenke zapremo in tlak v njej je enak zunanjemu zračnemu tlaku  $p_0$ . Ko se dvigamo in čas teče, se razlika med tlakom v plastenki  $p_N$  in zunanim tlakom  $p_Z$  spreminja zaradi dveh vzrokov.

**Prvi način reševanja – točna analitična rešitev**

Ker se dvigamo, se manjša zunanji zračni tlak

$$p_Z = p_0 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right) = p_0 \left(1 - \frac{\beta}{z_0} t\right) = p_0 \left(1 - \frac{t}{\tau_z}\right),$$

kjer smo definirali značilni čas  $\tau_z \equiv \frac{z_0}{\beta} = 1300\text{ min}$ . V času  $t = \tau_z$  bi se dvignili ravno  $z_0$ , torej bi v tem času glede na naš model atmosfere prišli do višine, kjer tlak pade na nič.

Po drugi strani iz plastenke v okolico zaradi nižje temperature okolice  $T_Z = -5,0^\circ\text{C}$  kot je temperatura v plastenki  $T_N = 0,0^\circ\text{C}$  ves čas odteka toplota in povzroča zmrzovanje vode v notranjosti. Ker je gostota ledu  $\rho_L$  manjša od gostote vode  $\rho_V > \rho_L$ , tvorba mase  $m_L$  ledu iz tekoče vode povzroči manjšanje prostornine zraka v plastenki

$$\Delta V_z(m_L) = \frac{m_L}{\rho_L} - \frac{m_L}{\rho_V} = m_L \frac{\rho_V - \rho_L}{\rho_V \rho_L}$$

Toplotni tok iz plastenke poganja temperaturna razlika  $\Delta T = T_N - T_Z = 0,0^\circ\text{C} - (-5,0^\circ\text{C}) = 5,0\text{ K}$ . Celotni toplotni tok iz plastenke je

$$P = \frac{\lambda S \Delta T}{d} = 11,1\text{ W},$$

kjer smo z  $S$  označili površino plastenke

$$S = 2S_0 + S_{\text{pl}} = 2S_0 + 2h\pi\sqrt{\frac{S_0}{\pi}} = 2\left(S_0 + h\sqrt{\pi S_0}\right) = 556,33\text{ cm}^2 \approx 556\text{ cm}^2.$$

Stalni toplotni tok iz plastenke ima za posledico linearno naraščanje mase ledu v plastenki

$$m_L(t) = \frac{P}{q_t} t = \frac{\lambda S \Delta T}{dq_t} t.$$

Temperatura v plastenki je konstantna, zato se splošna plinska enačba za zrak v plastenki poenostavi

$$p_0 V_Z = p_N V'_Z = p_N (V_Z - \Delta V_z(m_L)),$$

kjer  $V_Z$  označuje začetno prostornino zraka v plastenki  $V_Z = V_0 - \frac{m_0}{\rho_V} = 500\text{ mL}$ . Tlak v notranjosti plastenke se z naraščanjem mase ledu torej spreminja kot

$$p_N(m_L) = p_0 \frac{V_Z}{V_Z - \Delta V_z(m_L)},$$

kar da

$$p_N(t) = p_0 \left(1 - \frac{\Delta V_z(m_L(t))}{V_Z}\right)^{-1} = p_0 \left(1 - \frac{\rho_V - \rho_L}{\rho_V \rho_L} \frac{m_L(t)}{V_Z}\right)^{-1}$$

in na koncu

$$p_N(t) = p_0 \left( 1 - \frac{\rho_V - \rho_L}{\rho_V \rho_L} \frac{\lambda S \Delta T}{dq_t V_Z} t \right)^{-1} = p_0 \left( 1 - \frac{t}{\tau_L} \right)^{-1},$$

kjer smo podobno kot nekaj korakov prej definirali značilni čas

$$\tau_L \equiv \frac{\rho_V \rho_L dq_t V_Z}{(\rho_V - \rho_L) \lambda S \Delta T} = 151757 \text{ s} = 2529,3 \text{ min} \approx 2530 \text{ min}.$$

Čas  $\tau_L$  je čas, v katerem bi pri tej hitrosti pretvarjanja vode v led nastalo toliko ledu, da bi bilo povečanje volumna enako začetni prostornini zraka v plastenki  $V_Z$ . Seveda v plastenki ni dovolj vode, da bi nastalo toliko ledu, zato je ta interpretacija pomena časa  $\tau_L$  zgolj informativne narave.

Zdaj lahko končno zapišemo časovno odvisnost naraščanja tlačne razlike med notranjostjo in zunanostjo plastenke

$$\Delta p(t) = p_N(t) - p_Z(t) = p_0 \left( 1 - \frac{t}{\tau_L} \right)^{-1} - p_0 \left( 1 - \frac{t}{\tau_Z} \right)^{-1}$$

V mejnem primeru je  $\Delta p(t_a) = \Delta p_c$ , kar nam da za  $t_a$  kvadratno enačbo

$$t_a^2 - \left[ \tau_L + \tau_Z \left( 1 + \frac{\Delta p_c}{p_0} \right) \right] t_a + \tau_L \tau_Z \frac{\Delta p_c}{p_0} = 0$$

oziroma

$$t_a^2 - b t_a + c = 0,$$

kjer je

$$b = \tau_L + \tau_Z \left( 1 + \frac{\Delta p_c}{p_0} \right) = 4175 \text{ min}$$

in

$$c = \tau_L \tau_Z \frac{\Delta p_c}{p_0} = 874490 \text{ min}^2.$$

Rešitvi kvadratne enačbe sta

$$t_{a1} = 221,2 \text{ min} \quad \text{in} \quad t_{a2} = 3954 \text{ min}.$$

Rešitev  $t_{a2}$  je očitno fizikalno nesmiselna, saj je ta čas mnogo daljši od obeh časov  $\tau_L$  in  $\tau_Z$ . Fizikalno smiselna rešitev je torej  $t_a = 221$  minut oziroma 3,7 h.

..... TOČKOVANJE - EKSAKTNA REŠITEV .....

- 1: *pravilno izražena ali izračunana površina plastenke*
- 1: *pravilno izražen ali izračunan toplotni tok iz plastenke*
- 1: *pravilna odvisnost naraščanja mase ledu s časom*
- 1: *pravilna zveza med manjšanjem prostornine zraka v plastenki in maso ledu*
- 1: *pravilna zveza med tlakom v plastenki in maso ledu*
- 1: *pravilno zapisana razlika tlakov znotraj in zunaj plastenke v odvisnosti od časa*
- 1: *pravilno zapisana kvadratna enačba*
- 1: *pravilni izraz ali izračunana vrednost časa  $t_a$*

## Drugi način reševanja – linearizacija problema in približna rešitev

Do približne rešitve lahko s premislekom pridemo brez reševanja kvadratne enačbe. Ugotovimo, da mora veljati

$$t_a < \frac{\Delta p_c}{p_0} \tau_Z \approx \frac{1}{4} \tau_Z,$$

ker bi sicer dosegli kritično razliko tlakov že brez zmrzovanja vode samo zaradi manjšanja zunanega tlaka z višino. Kvocient  $t_a/\tau_L$  je približno polovico razmerja  $t_a/\tau_Z$ , torej manj kot 1/8. Zato relativno dobro velja

$$p_0 \left(1 - \frac{t_a}{\tau_L}\right)^{-1} \approx p_0 \left(1 + \frac{t_a}{\tau_L}\right).$$

S tem približkom dobimo enačbo

$$\Delta p_c = p_0 \left( \frac{1}{\tau_L} + \frac{1}{\tau_Z} \right) t_a$$

z rešitvijo

$$t_a = \frac{\Delta p_c}{p_0} \frac{\tau_L \tau_Z}{\tau_L + \tau_Z} = 228,4 \text{ min} \approx 3,8 \text{ h}.$$

- ..... TOČKOVANJE - LINEARIZIRAN PROBLEM .....
- 1: *pravilno izražena ali izračunana površina plastenke*
  - 1: *pravilno izražen ali izračunan toplotni tok iz plastenke*
  - 1: *pravilna odvisnost naraščanja mase ledu s časom*
  - 1: *pravilna zveza med manjšanjem prostornine zraka v platenki in maso ledu*
  - 1: *pravilna zveza med tlakom v platenki in spremembo prostornine zraka v njej*
  - 1: *pravilno linearizirana zveza med tlakom in maso ledu v platenki*
  - 1: *pravilno zapisana enačba za  $t_a$*
  - 1: *izračunana vrednost časa  $t_a$  v intervalu  $220 \text{ min} \leq t_a \leq 230 \text{ min}$*

## Tretji način reševanja – linearna ekstrapolacija numeričnega izračuna

Do približne rešitve lahko s premislekom pridemo še na tretji, bolj numerično naravnan način. Iz podatkov naloge lahko, kot smo pokazali, izračunamo maso ledu po nekem času  $t_x$ , od tu spremembo prostornine zraka v platenki in od tu tudi tlak v platenki ob času  $t_x$ .

Kar se tiče zunanje okolice je razmislek še enostavnejši, saj je podana odvisnost tlaka od višine in hitrost vzpenjanja v gore.

Z nekaj numeričnega truda lahko torej izračunamo, kolikšna je razlika tlakov  $\Delta p(t_x)$  znotraj in zunaj plastenke ob času  $t_x$ .

Razmisliti moramo o veljavnosti predpostavke, da se razlika tlakov znotraj in zunaj plastenke povečuje linearno s časom. Zunanji tlak očitno pada linearno s časom, ker se dvigamo s konstantno hitrostjo. Notranji tlak se bo spreminjal približno linearno, dokler bo relativna sprememba prostornine zaradi nastajanja ledu majhna v primerjavi s celotno prostornino zraka. Takrat dobro velja  $(1 - x)^{-1} \approx 1 + x$ , kjer je  $x$  razmerje spremembe prostornine zraka zaradi ledu  $\Delta V_Z(m_L)$  in začetne prostornine zraka  $V_Z = 500 \text{ mL}$ . Izračun za čas  $t_x = 10 \text{ min}$  da  $\Delta V_Z \approx 1,97 \text{ mL}$ , kar je zelo malo v primerjavi s  $500 \text{ mL}$ , kolikor je  $V_Z$ . Eksakten izračun spremembe tlaka v platenki da

$$\Delta p_N = p_0 \frac{V_Z}{V_Z - \Delta V_Z} - p_0 = 0,372 \text{ kPa}.$$

Zunanji tlak se spremeni za

$$\Delta p_Z = -p_0 \frac{\beta t_x}{z_0} = -p_0 \frac{60}{7800} = -0,723 \text{ kPa}.$$

Tlačna razlika po  $t_x = 10 \text{ min}$  je torej

$$\Delta p = \Delta p_N - \Delta p_Z = 1,095 \text{ kPa}.$$

Od tu z običajnim križnim računom

$$\frac{\Delta p}{\Delta p_c} = \frac{t_x}{t_a}$$

dobimo enak rezultat  $t_a = 228 \text{ min}$  kot s formalno linearizacijo pri drugem načinu reševanja. Še boljši rezultat dobimo, če izračunamo stanje pri večjem času, kar je v resnici pričakovano, saj smo bližje analitično izračunanemu času. Za čas  $t_y = 100 \text{ min}$ , na primer, z enakim postopkom in križnim računom dobimo rešitev  $t_a = 225 \text{ min}$ .

Fizikalno gledano sta poti reševanja pri drugem in tretjem načinu celo ustrežnejši od natančne analitične poti, saj se ves čas nekako zavedamo, kaj delamo, hkrati pa se izognemo reševanju kvadratne enačbe, ki nam poleg tega da eno povsem fizikalno nesmiselno rešitev.

..... TOČKOVANJE - NUMERIČNA EKSTRAPOLACIJA .....

- 1: *pravilno izražena ali izračunana površina plastenke*
- 1: *pravilno izražen ali izračunan toplotni tok iz plastenke*
- 1: *pravilna odvisnost naraščanja mase ledu s časom*
- 1: *pravilna zveza med manjšanjem prostornine zraka v plastenki in maso ledu*
- 1: *pravilen izračun spremembe tlaka v plastenki po izbranem času  $t_x$*
- 1: *pravilen izračun spremembe tlaka zunaj ob istem času  $t_x$*
- 1: *smiselna argumentacija uporabe križnega računa (linearna ekstrapolacija)*
- 1: *izračunana vrednost časa  $t_a$  v intervalu  $220 \text{ min} \leq t_a \leq 230 \text{ min}$*

## (b) 2 točki

Iz znanega časa  $t_a$  enostavno izračunamo količino nastalega ledu

$$m_L(t_a) = \frac{\lambda S \Delta T}{dq_t} t = 442 \text{ g} \approx 440 \text{ g}.$$

Vidimo, da v tem času zmrzne skoraj ves led v plastenki.

..... TOČKOVANJE .....

- 1: *uporaba pravilne enačbe za izračun mase ledu*
- 1: *pravilna vrednost za  $m_L(t_a)$*

## Rešitve nalog za skupino III

**N1.**  $m = 10 \text{ g}$ ,  $l = 20 \text{ cm}$ ,  $R = 1,0 \Omega$ ,  $R_n = 0,10 \Omega$ ,  $U_0 = 4,5 \text{ V}$ ,  $B_c = 200 \text{ mT}$ .

**(a) 2 točki**

Za uravnoteženje teže debele žice bo potrebno najmanjše polje, kadar bo magnetna sila kazala navpično navzgor. Od tu sklepamo, da mora biti magnetno polje vodoravno in hkrati pravokotno na debelo žico. Da bo smer magnetne sile kazala navpično, mora biti magnetno polje usmerjeno od debele žice proti žici, v katero je vezan vir.

..... TOČKOVANJE .....

1 : *ugotovitev, da mora biti magnetno polje vodoravno*

1 : *jasno označena ali opisana smer polja od debele žice proti viru pravokotno na debelo žico*

**(b) 3 točke**

Ravnovesje je doseženo, ko je magnetna sila  $F_b$  po velikosti enaka teži debele žice  $F_g$ . Ker je smer polja taka, kot smo ugotovili v delu **(a)**, velja

$$F_b = F_g \quad \text{oziroma} \quad I_b l B_b = mg.$$

Tok  $I_b$  po zanki določa Ohmov zakon

$$U_0 = I_b(R_n + R) \quad \text{oziroma} \quad I_b = \frac{U_0}{R_n + R}$$

od koder dobimo

$$B_b = \frac{mg}{lI_b} = \frac{mg(R_n + R)}{lU_0} = 119,8 \text{ mT} \approx 120 \text{ mT}.$$

..... TOČKOVANJE .....

1 : *pravilen zapis enačbe za ravnovesje sil*

1 : *pravilen izraz za tok po zanki*

1 : *pravilen izraz ali pravilna vrednost za  $B_b$*

**(c) 5 točk**

Ker je magnetno polje  $B_c$  večje od  $B_b$ , je magnetna sila večja od sile teže in se zanka zavrti tako, da je debela žica nad žico z virom – zanka stoji v navpični ravnini.

Ko je debela žica v vodoravni smeri za  $x$  odmaknjena iz ravnovesne lege, tvori zanka z navpično ravnino kot  $\varphi$  in velja  $\sin(\varphi) = x/l$ . Za majhne kote  $\varphi \ll 1$  je vodoravna komponenta rezultante sil na debelo žico enaka

$$F_x = -(F_c - F_g) \sin(\varphi) \doteq -(F_c - F_g) \varphi \doteq -(F_c - F_g) \frac{x}{l},$$

kjer negativni predznak pomeni, da sila vrača debelo žico v ravnovesno lego. Ker je tok po zanki enak kot v delu **(b)**, spremenili smo le gostoto magnetnega polja z  $B_b$  na  $B_c$ , velja za magnetno silo  $F_c$  relacija

$$\frac{F_c}{F_b} = \frac{B_c}{B_b} \quad \text{oziroma} \quad F_c = F_b \frac{B_c}{B_b} = F_g \frac{B_c}{B_b}.$$

Zdaj zapišemo 2. Newtonov zakon za gibanje debele žice v vodoravni smeri okoli ravnovesne lege za majhne odmike  $x \ll l$

$$ma = F_x = -(F_c - F_g) \frac{x}{l} = -\left(F_g \frac{B_c}{B_b} - F_g\right) \frac{x}{l} = -mg \frac{B_c - B_b}{B_b} \frac{x}{l}.$$

Od tu dobimo

$$a = -\frac{g(B_c - B_b)}{lB_b} x,$$

od koder preberemo frekvenco nihanja

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \omega = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l} \left( \frac{B_c}{B_b} - 1 \right)} = 0,912 \text{ Hz} \approx 0,91 \text{ Hz} \approx 0,9 \text{ Hz}.$$

Alternativna vrednost za kotno frekvenco je  $\omega = 5,73 \text{ s}^{-1} \approx 5,7 \text{ s}^{-1}$ .

..... TOČKOVANJE .....

- 1: ugotovitev, da je  $B_c > B_b$ , zato se zanka postavi navpično pokonci
- 1: pravilen izraz za silo  $F_x$  za splošen kot
- 1: pravilna poenostavitev  $F_x$  za majhne kote
- 1: pravilen izraz za pospešek  $a$  v vodoravni smeri za majhne kote
- 1: pravilen izraz ali pravilna vrednost za  $\nu$  ali  $\omega$

**N2.**  $\Delta T = 5,0^\circ\text{C} = 5,0\text{ K}$ ,  $V_0 = 1,0\text{ L}$ ,  $m_0 = 500\text{ g}$ ,  $\beta = 6,0\text{ m/min}$ ,  $\rho_V = 1,00\text{ g/L}$ ,  $\rho_L = 910\text{ g/L}$ ,  $h = 12,5\text{ cm}$ ,  $S_0 = 80\text{ cm}^2$ ,  $d = 1,0\text{ mm}$ ,  $\lambda = 0,040\text{ W/m K}$ ,  $q_t = 334\text{ kJ/kg}$ ,  $p_0 = 94\text{ kPa}$ ,  $z_0 = 7,8\text{ km}$ ,  $\Delta p_c = 25\text{ kPa}$ .

**(a) 8 točk**

Ob vznožju plastenko zapremo in tlak v njej je enak zunanjemu zračnemu tlaku  $p_0$ . Ko se dvigamo in čas teče, se razlika med tlakom v plastenki  $p_N$  in zunanim tlakom  $p_Z$  spreminja zaradi dveh vzrokov.

**Prvi način reševanja – točna analitična rešitev**

Ker se dvigamo, se manjša zunanji zračni tlak

$$p_Z = p_0 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right) = p_0 \left(1 - \frac{\beta t}{z_0}\right) = p_0 \left(1 - \frac{t}{\tau_z}\right),$$

kjer smo definirali značilni čas  $\tau_z \equiv \frac{z_0}{\beta} = 1300\text{ min}$ . V času  $t = \tau_z$  bi se dvignili ravno  $z_0$ , torej bi v tem času glede na naš model atmosfere prišli do višine, kjer tlak pade na nič.

Po drugi strani iz plastenke v okolico zaradi nižje temperature okolice  $T_Z = -5,0^\circ\text{C}$  kot je temperatura v plastenki  $T_N = 0,0^\circ\text{C}$  ves čas odteka toplota in povzroča zmrzovanje vode v notranjosti. Ker je gostota ledu  $\rho_L$  manjša od gostote vode  $\rho_V > \rho_L$ , tvorba mase  $m_L$  ledu iz tekoče vode povzroči manjšanje prostornine zraka v plastenki

$$\Delta V_z(m_L) = \frac{m_L}{\rho_L} - \frac{m_L}{\rho_V} = m_L \frac{\rho_V - \rho_L}{\rho_V \rho_L}$$

Toplotni tok iz plastenke poganja temperaturna razlika  $\Delta T = T_N - T_Z = 0,0^\circ\text{C} - (-5,0^\circ\text{C}) = 5,0\text{ K}$ . Celotni toplotni tok iz plastenke je

$$P = \frac{\lambda S \Delta T}{d} = 11,1\text{ W},$$

kjer smo z  $S$  označili površino plastenke

$$S = 2S_0 + S_{\text{pl}} = 2S_0 + 2h\pi\sqrt{\frac{S_0}{\pi}} = 2\left(S_0 + h\sqrt{\pi S_0}\right) = 556,33\text{ cm}^2 \approx 556\text{ cm}^2.$$

Stalni toplotni tok iz plastenke ima za posledico linearno naraščanje mase ledu v plastenki

$$m_L(t) = \frac{P}{q_t} t = \frac{\lambda S \Delta T}{dq_t} t.$$

Temperatura v plastenki je konstantna, zato se splošna plinska enačba za zrak v plastenki poenostavi

$$p_0 V_Z = p_N V'_Z = p_N (V_Z - \Delta V_z(m_L)),$$

kjer  $V_Z$  označuje začetno prostornino zraka v plastenki  $V_Z = V_0 - \frac{m_0}{\rho_V} = 500\text{ mL}$ . Tlak v notranjosti plastenke se z naraščanjem mase ledu torej spreminja kot

$$p_N(m_L) = p_0 \frac{V_Z}{V_Z - \Delta V_z(m_L)},$$

kar da

$$p_N(t) = p_0 \left(1 - \frac{\Delta V_z(m_L(t))}{V_Z}\right)^{-1} = p_0 \left(1 - \frac{\rho_V - \rho_L}{\rho_V \rho_L} \frac{m_L(t)}{V_Z}\right)^{-1}$$

in na koncu

$$p_N(t) = p_0 \left( 1 - \frac{\rho_V - \rho_L}{\rho_V \rho_L} \frac{\lambda S \Delta T}{dq_t V_Z} t \right)^{-1} = p_0 \left( 1 - \frac{t}{\tau_L} \right)^{-1},$$

kjer smo podobno kot nekaj korakov prej definirali značilni čas

$$\tau_L \equiv \frac{\rho_V \rho_L dq_t V_Z}{(\rho_V - \rho_L) \lambda S \Delta T} = 151757 \text{ s} = 2529,3 \text{ min} \approx 2530 \text{ min}.$$

Čas  $\tau_L$  je čas, v katerem bi pri tej hitrosti pretvarjanja vode v led nastalo toliko ledu, da bi bilo povečanje volumna enako začetni prostornini zraka v plastenki  $V_Z$ . Seveda v plastenki ni dovolj vode, da bi nastalo toliko ledu, zato je ta interpretacija pomena časa  $\tau_L$  zgolj informativne narave.

Zdaj lahko končno zapišemo časovno odvisnost naraščanja tlačne razlike med notranjostjo in zunanostjo plastenke

$$\Delta p(t) = p_N(t) - p_Z(t) = p_0 \left( 1 - \frac{t}{\tau_L} \right)^{-1} - p_0 \left( 1 - \frac{t}{\tau_Z} \right)^{-1}$$

V mejnem primeru je  $\Delta p(t_a) = \Delta p_c$ , kar nam da za  $t_a$  kvadratno enačbo

$$t_a^2 - \left[ \tau_L + \tau_Z \left( 1 + \frac{\Delta p_c}{p_0} \right) \right] t_a + \tau_L \tau_Z \frac{\Delta p_c}{p_0} = 0$$

oziroma

$$t_a^2 - b t_a + c = 0,$$

kjer je

$$b = \tau_L + \tau_Z \left( 1 + \frac{\Delta p_c}{p_0} \right) = 4175 \text{ min}$$

in

$$c = \tau_L \tau_Z \frac{\Delta p_c}{p_0} = 874490 \text{ min}^2.$$

Rešitvi kvadratne enačbe sta

$$t_{a1} = 221,2 \text{ min} \quad \text{in} \quad t_{a2} = 3954 \text{ min}.$$

Rešitev  $t_{a2}$  je očitno fizikalno nesmiselna, saj je ta čas mnogo daljši od obeh časov  $\tau_L$  in  $\tau_Z$ . Fizikalno smiselna rešitev je torej  $t_a = 221$  minut oziroma 3,7 h.

..... TOČKOVANJE - EKSAKTNA REŠITEV .....

- 1: *pravilno izražena ali izračunana površina plastenke*
- 1: *pravilno izražen ali izračunan toplotni tok iz plastenke*
- 1: *pravilna odvisnost naraščanja mase ledu s časom*
- 1: *pravilna zveza med manjšanjem prostornine zraka v plastenki in maso ledu*
- 1: *pravilna zveza med tlakom v plastenki in maso ledu*
- 1: *pravilno zapisana razlika tlakov znotraj in zunaj plastenke v odvisnosti od časa*
- 1: *pravilno zapisana kvadratna enačba*
- 1: *pravilni izraz ali izračunana vrednost časa  $t_a$*



## Drugi način reševanja – linearizacija problema in približna rešitev

Do približne rešitve lahko s premislekom pridemo brez reševanja kvadratne enačbe. Ugotovimo, da mora veljati

$$t_a < \frac{\Delta p_c}{p_0} \tau_Z \approx \frac{1}{4} \tau_Z,$$

ker bi sicer dosegli kritično razliko tlakov že brez zmrzovanja vode samo zaradi manjšanja zunanega tlaka z višino. Kvocient  $t_a/\tau_L$  je približno polovico razmerja  $t_a/\tau_Z$ , torej manj kot 1/8. Zato relativno dobro velja

$$p_0 \left(1 - \frac{t_a}{\tau_L}\right)^{-1} \approx p_0 \left(1 + \frac{t_a}{\tau_L}\right).$$

S tem približkom dobimo enačbo

$$\Delta p_c = p_0 \left( \frac{1}{\tau_L} + \frac{1}{\tau_Z} \right) t_a$$

z rešitvijo

$$t_a = \frac{\Delta p_c}{p_0} \frac{\tau_L \tau_Z}{\tau_L + \tau_Z} = 228,4 \text{ min} \approx 3,8 \text{ h}.$$

- ..... TOČKOVANJE - LINEARIZIRAN PROBLEM .....
- 1: *pravilno izražena ali izračunana površina plastenke*
  - 1: *pravilno izražen ali izračunan toplotni tok iz plastenke*
  - 1: *pravilna odvisnost naraščanja mase ledu s časom*
  - 1: *pravilna zveza med manjšanjem prostornine zraka v platenki in maso ledu*
  - 1: *pravilna zveza med tlakom v platenki in spremembo prostornine zraka v njej*
  - 1: *pravilno linearizirana zveza med tlakom in maso ledu v platenki*
  - 1: *pravilno zapisana enačba za  $t_a$*
  - 1: *izračunana vrednost časa  $t_a$  v intervalu  $220 \text{ min} \leq t_a \leq 230 \text{ min}$*

## Tretji način reševanja – linearna ekstrapolacija numeričnega izračuna

Do približne rešitve lahko s premislekom pridemo še na tretji, bolj numerično naravnan način. Iz podatkov naloge lahko, kot smo pokazali, izračunamo maso ledu po nekem času  $t_x$ , od tu spremembo prostornine zraka v platenki in od tu tudi tlak v platenki ob času  $t_x$ .

Kar se tiče zunanje okolice je razmislek še enostavnejši, saj je podana odvisnost tlaka od višine in hitrost vzpenjanja v gore.

Z nekaj numeričnega truda lahko torej izračunamo, kolikšna je razlika tlakov  $\Delta p(t_x)$  znotraj in zunaj plastenke ob času  $t_x$ .

Razmisliti moramo o veljavnosti predpostavke, da se razlika tlakov znotraj in zunaj plastenke povečuje linearno s časom. Zunanji tlak očitno pada linearno s časom, ker se dvigamo s konstantno hitrostjo. Notranji tlak se bo spreminjal približno linearno, dokler bo relativna sprememba prostornine zaradi nastajanja ledu majhna v primerjavi s celotno prostornino zraka. Takrat dobro velja  $(1 - x)^{-1} \approx 1 + x$ , kjer je  $x$  razmerje spremembe prostornine zraka zaradi ledu  $\Delta V_Z(m_L)$  in začetne prostornine zraka  $V_Z = 500 \text{ mL}$ . Izračun za čas  $t_x = 10 \text{ min}$  da  $\Delta V_Z \approx 1,97 \text{ mL}$ , kar je zelo malo v primerjavi s  $500 \text{ mL}$ , kolikor je  $V_Z$ . Eksakten izračun spremembe tlaka v platenki da

$$\Delta p_N = p_0 \frac{V_Z}{V_Z - \Delta V_Z} - p_0 = 0,372 \text{ kPa}.$$

Zunanji tlak se spremeni za

$$\Delta p_Z = -p_0 \frac{\beta t_x}{z_0} = -p_0 \frac{60}{7800} = -0,723 \text{ kPa}.$$

Tlačna razlika po  $t_x = 10 \text{ min}$  je torej

$$\Delta p = \Delta p_N - \Delta p_Z = 1,095 \text{ kPa}.$$

Od tu z običajnim križnim računom

$$\frac{\Delta p}{\Delta p_c} = \frac{t_x}{t_a}$$

dobimo enak rezultat  $t_a = 228 \text{ min}$  kot s formalno linearizacijo pri drugem načinu reševanja. Še boljši rezultat dobimo, če izračunamo stanje pri večjem času, kar je v resnici pričakovano, saj smo bližje analitično izračunanemu času. Za čas  $t_y = 100 \text{ min}$ , na primer, z enakim postopkom in križnim računom dobimo rešitev  $t_a = 225 \text{ min}$ .

Fizikalno gledano sta poti reševanja pri drugem in tretjem načinu celo ustrežnejši od natančne analitične poti, saj se ves čas nekako zavedamo, kaj delamo, hkrati pa se izognemo reševanju kvadratne enačbe, ki nam poleg tega da eno povsem fizikalno nesmiselno rešitev.

..... TOČKOVANJE - NUMERIČNA EKSTRAPOLACIJA .....

- 1: *pravilno izražena ali izračunana površina plastenke*
- 1: *pravilno izražen ali izračunan toplotni tok iz plastenke*
- 1: *pravilna odvisnost naraščanja mase ledu s časom*
- 1: *pravilna zveza med manjšanjem prostornine zraka v platenki in maso ledu*
- 1: *pravilen izračun spremembe tlaka v platenki po izbranem času  $t_x$*
- 1: *pravilen izračun spremembe tlaka zunaj ob istem času  $t_x$*
- 1: *smiselna argumentacija uporabe križnega računa (linearna ekstrapolacija)*
- 1: *izračunana vrednost časa  $t_a$  v intervalu  $220 \text{ min} \leq t_a \leq 230 \text{ min}$*

### (b) 2 točki

Iz znanega časa  $t_a$  enostavno izračunamo količino nastalega ledu

$$m_L(t_a) = \frac{\lambda S \Delta T}{dq_t} t = 442 \text{ g} \approx 440 \text{ g}.$$

Vidimo, da v tem času zmrzne skoraj ves led v platenki.

..... TOČKOVANJE .....

- 1: *uporaba pravilne enačbe za izračun mase ledu*
- 1: *pravilna vrednost za  $m_L(t_a)$*

**N3.**  $S = 15 \text{ dm}^2$ ,  $l = 100 \text{ m}$ ,  $m_0 = 9000 \text{ kg}$ ,  $\rho = 1,75 \text{ kg/L}$ ,  $v_0 = 2,00 \text{ km/s}$ ,  $v_1 = 550 \text{ m/s}$ ,  $t_0 = 55 \text{ min}$ .

### (a) 4 točke

Motor deluje z največjo močjo  $P_0$  v času  $t_0$ , v katerem se obodna hitrost sonde in uteži poveča s hitrosti  $v_1$  na  $v_0$ . Delo motorja gre v spremembo rotacijske energije centrifuge, ki jo sestavljajo na sredini vpeta palica in sonda ter utež na vsakem krajišču

$$A = \Delta W_{\text{rot}} \quad \text{oziroma} \quad P_0 t_0 = \frac{1}{2} J (\omega_0^2 - \omega_1^2),$$

kjer je  $J$  vztrajnostni moment centrifuge in  $\omega_0$  ter  $\omega_1$  po vrsti končna in začetna kotna hitrost vrtenja centrifuge. Kotna hitrost je z obodno hitrostjo sonde oziroma uteži povezana z enačbo

$$\omega_i = \frac{v_i}{\frac{1}{2}l} = \frac{2v_i}{l},$$

kjer je indeks  $i$  enak 0 ali 1 po vrsti za končno in začetno stanje. K vztrajnostnemu momentu centrifuge prispevajo palica in utež ter sonda kot točkasti masi na oddaljenosti  $\frac{1}{2}l$  od osi vrtenja

$$J = 2m_0 \frac{l^2}{4} + m_p \frac{l^2}{12} = \frac{l^2}{12} (6m_0 + m_p)$$

in smo z  $m_p$  označili maso palice  $m_p = \rho l S = 26250 \text{ kg}$ . Za največjo moč motorja dobimo

$$P_0 = \frac{J}{2t_0} (\omega_0^2 - \omega_1^2) = \frac{(6m_0 + m_p) (v_0^2 - v_1^2)}{6t_0} = 14986 \text{ kW} \approx 15 \text{ MW}$$

..... TOČKOVANJE .....

- 1: *pravilen izraz ali vrednost za maso palice*
- 1: *pravilen izraz ali vrednost za vztrajnostni moment centrifuge*
- 1: *pravilen energijski razmislek, da delo večja rotacijsko energijo*
- 1: *pravilen izraz ali pravilna vrednost za  $P_0$*

### (b) 3 točke

Tudi pri izračunu kotnega pospeška centrifuge pri dani kotni hitrosti  $\omega$  si pomagamo z energijo. V kratkem času  $dt$  se kotna hitrost poveča z  $\omega$  na  $\omega + d\omega$

$$dW_{\text{rot}} = P dt \quad \text{oziroma} \quad P dt = \frac{1}{2} J d(\omega^2) = J \omega d\omega$$

in od tu

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{P}{J\omega}.$$

Ko motor deluje s stalno močjo, se kotni pospešek s časom zmanjšuje. Tik pred izstrelitvijo je  $\omega_0 = 2v_0/l$ , kar da za kotni pospešek centrifuge

$$\alpha(\omega_0) = \frac{P_0}{J\omega_0} = \frac{2(v_0^2 - v_1^2)}{l^2 \omega_0 t_0} = 5,6 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-2}.$$

..... TOČKOVANJE .....

- 1: *pravilni nastavek za spremembo rotacijske energije zaradi dela motorja*
- 1: *pravilen izraz za odvisnost kotnega pospeška od  $\omega$  pri konstantni moči*
- 1: *pravilen izraz ali pravilna vrednost za  $\alpha(\omega_0)$*

### (c) 3 točke

Iskana sila, pravokotna na palico, je po velikosti enaka sili, ki med vrtenjem centrifuge pospešuje sondo v tangencialni smeri. Ker se centrifuga vrti v navpični ravnini, je pri konstantnem kotnem pospešku sila sonde, pravokotna na palico, največja takrat, ko je palica v vodoravni legi in se sonda giblje navpično navzgor. Takrat mora pravokotna komponenta sile palice na sondo premagovati tudi težo sonde.

$$F_{\perp}(\omega) = a_t(\omega)m_0 + gm_0 = \left( \frac{1}{2} l \alpha(\omega) + g \right) m_0.$$

V začetnem delu vrtenja z nizkimi hitrostmi centrifuga pospešuje s konstantnim kotnim pospeškom. Ko vrtenje centrifuge motor pospešuje s konstantno največjo močjo  $P_0$  z naraščanjem  $\omega$  kotni pospešek, in z njim tudi tangencialni pospešek sonde, pada. Največja sila na palico v pravokotni smeri glede na palico je na začetku vrtenja in se ne spreminja dokler se sonda ne premika z obodno hitrostjo  $v_1$ . Za največjo silo v pravokotni smeri dobimo

$$F_{\perp 0}(\omega_1) = \left[ \frac{(v_0^2 - v_1^2)}{2v_1 t_0} + g \right] m_0 = 97367 \text{ N} \approx 97,4 \text{ kN}$$

..... TOČKOVANJE .....

- 1 : ugotovitev, da je  $F_{\perp}$  povezana s tangencialnim pospeškom sonde in s težo sonde
- 1 : ugotovitev, da bo sila največja na začetku gibanja oziroma pri obodni hitrosti  $v_1$
- 1 : pravilen izraz ali pravilna vrednost za  $F_{\perp 0}$