



**UNIVERZA
V LJUBLJANI**

PEF

**Pedagoška
fakulteta**

Interaktivne ponazoritve zahtevnejših konceptov SŠ matematike

Dr. Boštjan Kuzman

KATIS izobraževanje,
jesen 2025

O MENI

- Študij in doktorat iz teoretične matematike na UL FMF
- Docent za matematiko na Pedagoški fakulteti, Univerza v Ljubljani
- Raziskovalno delo na področju diskretne matematike (algebraična teorija grafov)
- Predavanja iz matematičnih predmetov za študente PEF (pretežno dvopredmetni Ma+)
- Razno
 - Tabor MARS (2006-2015)
 - Urednik za matematiko revije Presek (od 2020)
 - (So)organizacija seminarjev za učitelje
 - Aktivnosti za promocijo znanosti (DMFA Slovenije)



TEMA SEMINARJA: Interaktivne ponazoritve konceptov SŠ matematike

VSEBINE: 1. Stožnice, 2. Limita zaporedja in funkcije, 3. Obrestno obrestni račun, 4. Števili π in e , 5. Popolna, pogojna in obratna verjetnost, 6. Geometrijsko zaporedje in vrsta, 7. Kombinacije in binomska porazdelitev, 8. Odvod in integral, 9. Normalna porazdelitev, 10. Razni zgledi

NAČRT DELA: 8x3 ure na Zoom, četrtki ob 17:00-19:15

- Ura je lahko tudi prej (16:00, 15:00)?
- Zadnje srečanje lahko imamo v živo (dvojni termin)?
- Izražena želja za pomik 6.11., 4.12. na drug dan/uro???

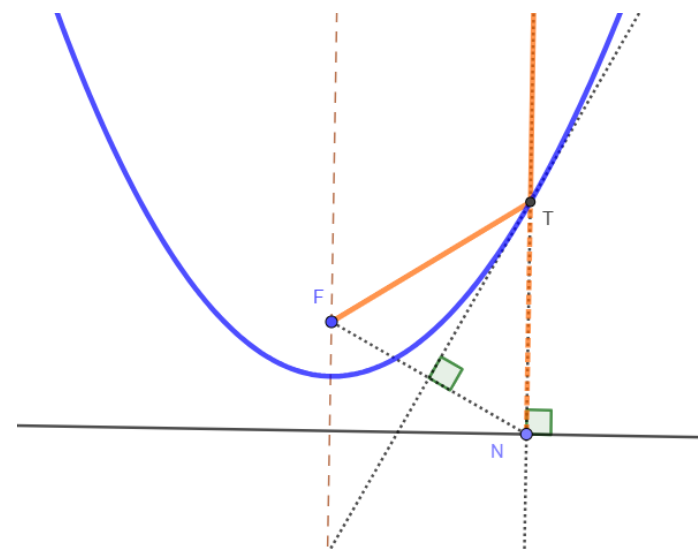
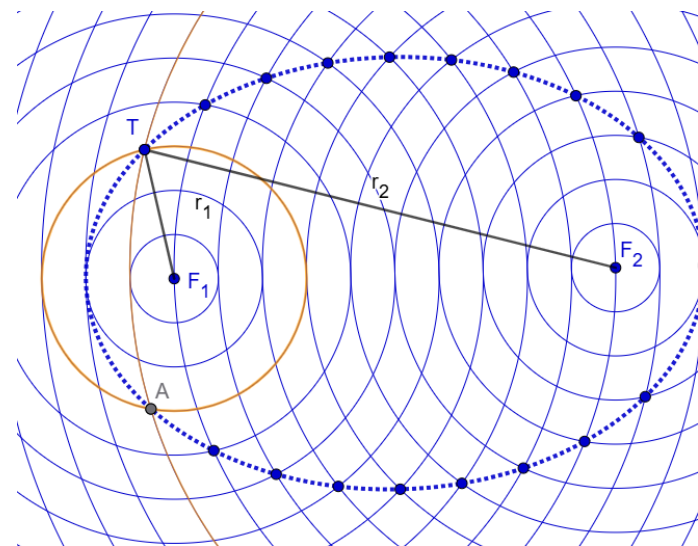
NAČIN DELA:

- Delavnica:
 - Pokažem primer. Udeleženci posnemajo in predlagajo svoje rešitve (večinoma v GeoGebri).
 - Zastavim izziv: udeleženci ga poskušajo rešiti samostojno ali v majhnih skupinah.
- Predstavitve udeležencev (vsak udeleženec predstavi eno stvar iz lastne prakse, 15-20 minut).

UDELEŽENCI:

1. FOŠNARIČ MATEJA, II. gimnazija Maribor
2. JANŽEKOVIČ NIVES, Gimnazija Ormož
3. KNEZ MATEJA, SVŠGUG Ljubljana
4. KRIŽANIČ POLONCA, II. gimnazija Maribor
5. MOČNIK ALENKA, SŠ Veno Pilon Ajdovščina
6. OLENIK IRENA, Gimnazija Koper
7. POVŠE PISTOTNIK ŠPELA, Gimnazija, elektro in pomorska šola Piran
8. POŽGAN ANA, II. gimnazija Maribor
9. SIMONIČ TATJANA, II. gimnazija Maribor
10. SORŠAK MIHA, Prva gimnazija Maribor
11. STRMŠEK MANCA, II. gimnazija Maribor
12. ŠTULAC BARBARA, Šolski center Slovenj Gradec
13. TROŠT MATJAŽ, SŠ Veno Pilon Ajdovščina
14. TRPIN ALENKA, ŠC Škofja Loka
15. HROVATIČ TJAŠA, ERSŠ Ljubljana

1. srečanje (16. 10. 2025): Stožnice



Kakšne ponazoritve stožnic znamo narediti v GeoGebri?

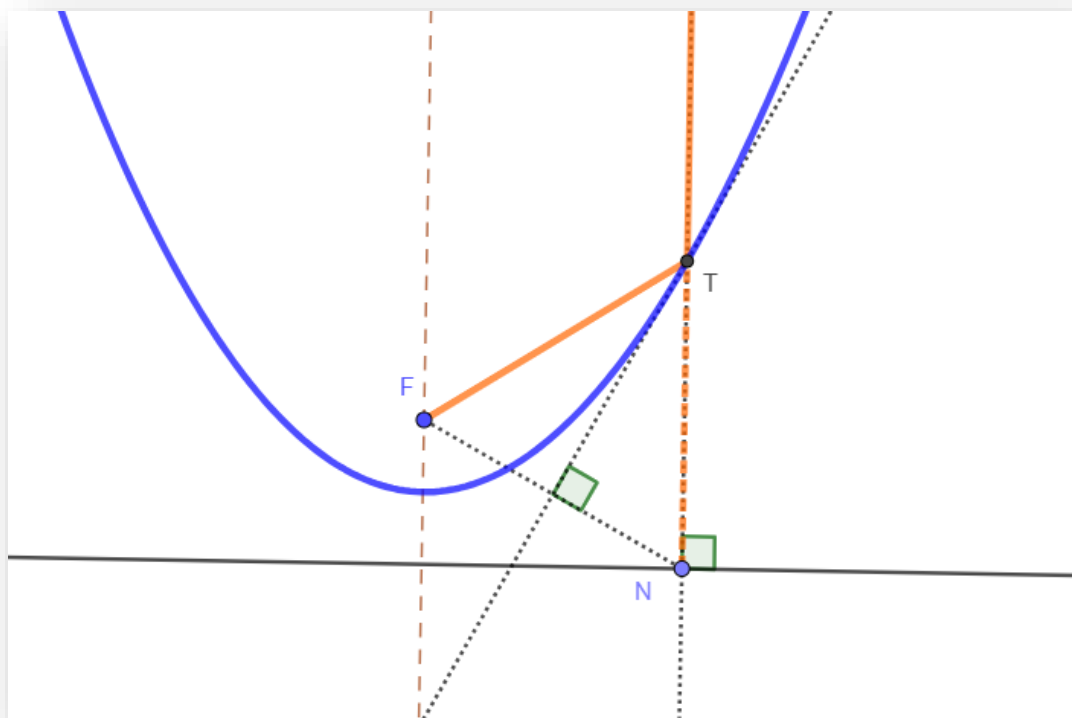
PREDLOGI UDELEŽENCEV:

1. Vnos z enačbo
2. Vnos z geometrijskimi orodji
3. Vnos z algebrskimi ukazi
4. ...
5. ...

Konstrukcija parabole s sledjo točke

Parabola je množica (loкус) vseh točk v ravnini, katerih oddaljenost od gorišča F je enaka oddaljenosti od premice vodnice. V GeoGebri lahko parabolo upodobimo kot sled točke T pri pomikanju točke N na premici vodnici.

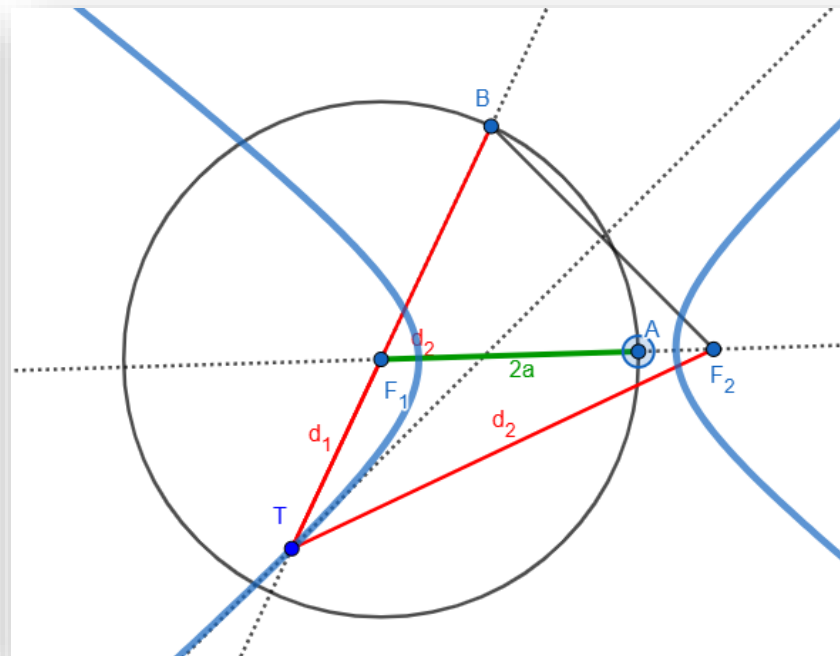
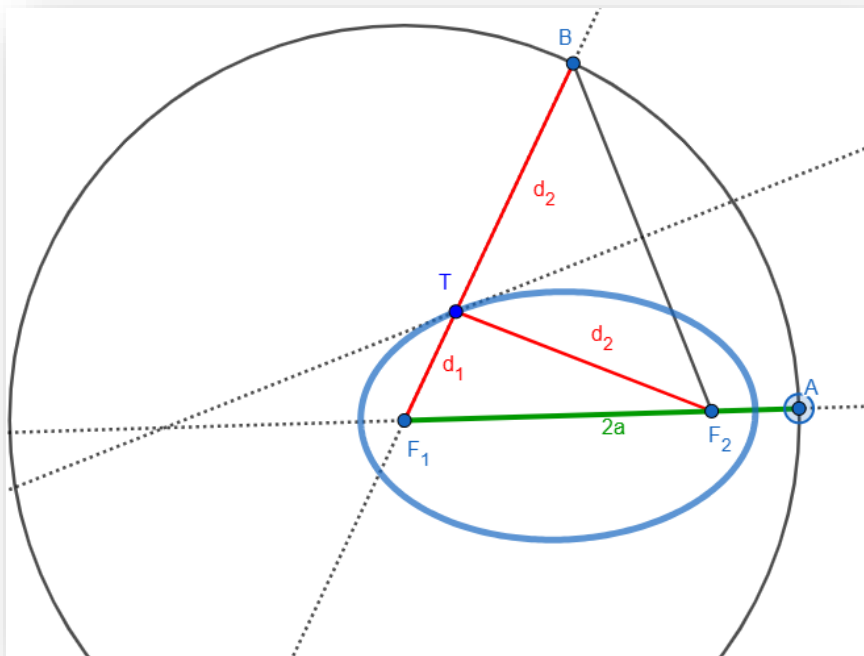
- Izdelajte ustrezno konstrukcijo v GeoGebri z uporabo geometrijskih orodij.
- Utemeljite pravilnost konstrukcije
- Opazujte spremembo oblike parabole glede na gibanje gorišča
- Ob skici pojasnite odbojno lastnost parabole



Konstrukcija elipse in hiperbole s sledjo točke

Podobno kot parabolo lahko tudi elipso in hiperbolo konstruiramo kot lokus točk s konstantno vsoto oziroma pozitivno razliko razdalj glede na dani gorišči. V tem primeru ustrezna stožnica nastane ob gibanju točke po krožnici s središčem v enem od gorišč.

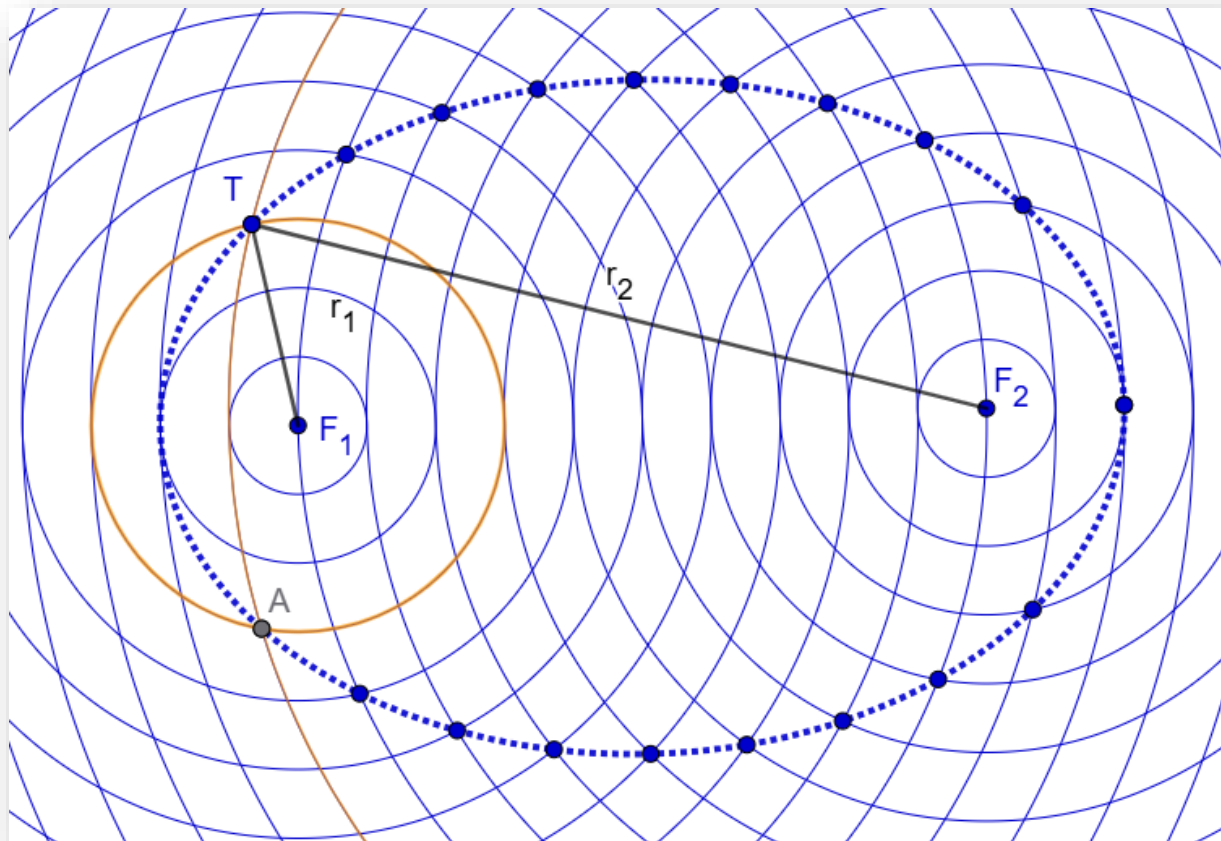
- Izdelajte ustrezno konstrukcijo v GeoGebri z uporabo geometrijskih orodij.
- Utemeljite pravilnost konstrukcije.
- Opazujte spremembo tipa stožnice glede na položaj drugega gorišča
- Ob skicah pojasnite odbojno lastnost elipse in hiperbole



Konstrukcija elipse s koncentričnimi krožnicami

Elipso lahko približno skiciramo tako, da okrog vsakega gorišča narišemo enakomerno razmaknjene krožnice. V dobljeni mreži označimo poljubno presečišče. Nato zapored označujemo presečišče naslednje krožnice prve skupine in prejšnje krožnice druge skupine.

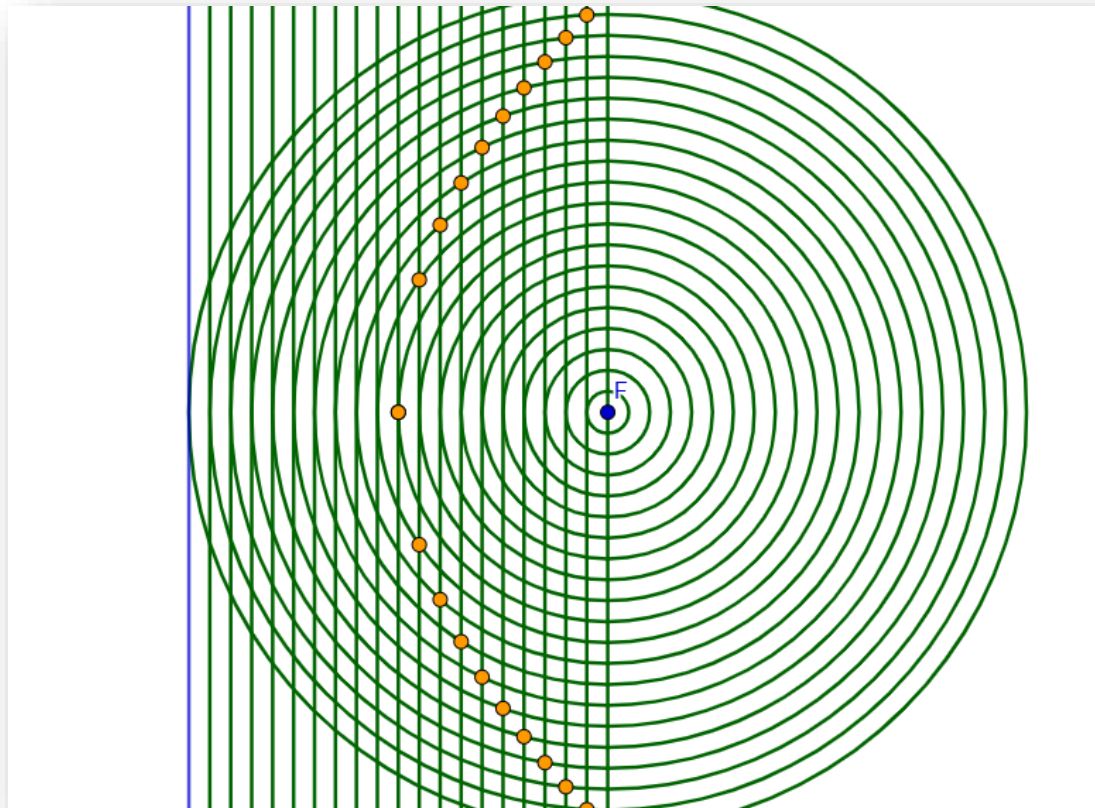
- Označene točke ležijo na elipsi. Zakaj? Utemeljite.
- Izdelajte ustrezno konstrukcijo v GeoGebri z uporabo zaporedij.
- Kako bi konstrukcijo malenkost popravili, da bi namesto elipse dobili hiperbolo?



Konstrukcija parabole s koncentričnimi krožnicami in premicami

Podobno kot prej elipso lahko tudi parabolo približno skiciramo tako, da okrog gorišča narišemo enakomerno razmaknjene krožnice, nato pa jih presekamo z enako razmaknjenimi vzporednicami premice vodilke.

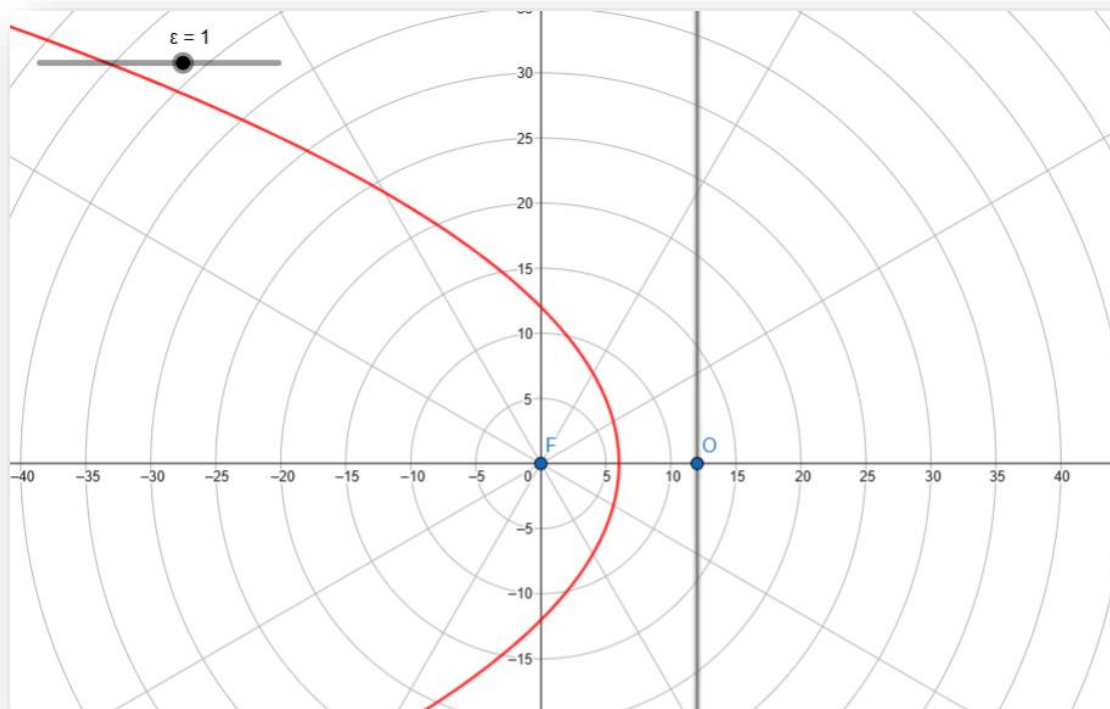
- Označene točke ležijo na paraboli. Zakaj? Utemeljite.
- Izdelajte ustrezno konstrukcijo v GeoGebri z uporabo zaporedij.



Opis stožnic s polarno krivuljo

Vse tri tipe neizrojenih stožnic lahko (v središčni legi) elegantno zapišemo s polarno enačbo $r = \frac{d \cdot \varepsilon}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\vartheta)}$, kjer je $\vartheta \in [0, 2\pi)$. Parameter d predstavlja razdaljo vodnice do gorišča, parameter epsilon pa numerično ekscentričnost elipse $\varepsilon = \frac{d(T,F)}{d(T,v)}$.

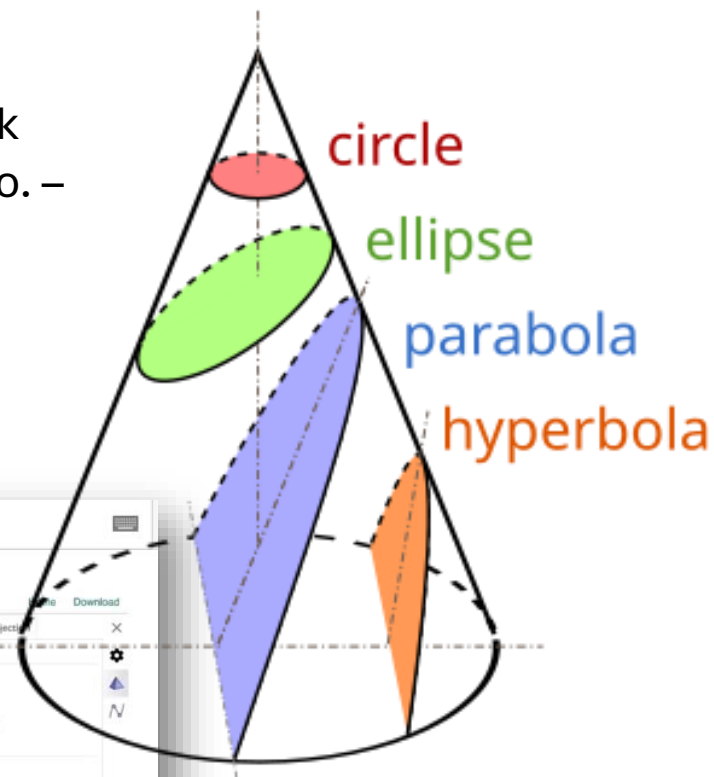
- Izdelaj konstrukcijo in opazuj tip stožnice glede na njeno numerično ekscentričnost. Kaj velja za primere $\varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon > 1$?
- Namig: Ustrezen ukaz v GeoGebri je Krivulja. Polarne koordinate vnesemo s podpičjem.



Stožnice kot presek stožca in ravnine:

Znano je, da različne stožnice dobimo kot presek neskončnega dvojnega stožca z ustrežno ravnino. –

- Poskusite 4 tipe stožnic čimbolj učinkovito prikazati z GeoGebro v 3D načinu.



GeoGebra 3D Graphing Calculator

How You Can EASILY Create the 4 Main Conic Sections in GeoGebra's 3D App

Tim Brzezinski
13,7 tis. naročnikov

Naročite se

41

Deli

Prenesi

Izrezek

...

The screenshot shows the GeoGebra 3D Graphing Calculator interface. On the left, there is a list of equations: $a: z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $b: z = -\sqrt{x^2 + y^2}$, $k = 5$, $c: z = k$, and $-z = 5$. The main 3D view displays a double cone and a plane intersecting it, with the resulting conic section highlighted. The right sidebar contains various settings for the 3D view, including axes, navigation, and clipping options.

Namig: Oglej si video na naslovu <https://www.youtube.com/watch?v=c7jcdxpVx1k>

RAZNI IZZIVI S STOŽNICAMI V GEOGEBRI:

- **Obravnavaj stožnice v nestandardni legi s pomočjo matrik 2x2 in ustreznih drsnikov.**

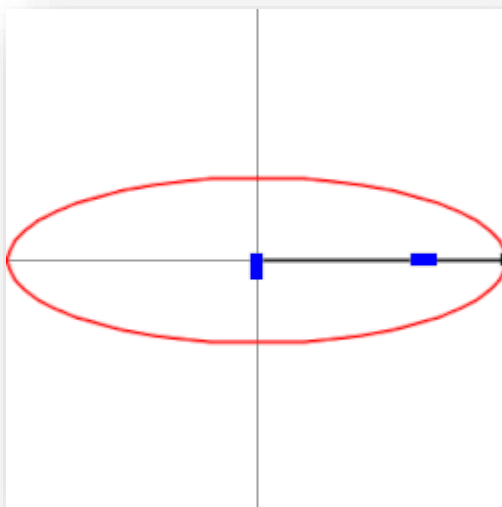
$$Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F = 0.$$

If the conic is [non-degenerate](#), then:^[14]

- if $B^2 - 4AC < 0$, the equation represents an [ellipse](#);
 - if $A = C$ and $B = 0$, the equation represents a [circle](#), which is a special case of an ellipse;
- if $B^2 - 4AC = 0$, the equation represents a [parabola](#);
- if $B^2 - 4AC > 0$, the equation represents a [hyperbola](#);
 - if $A + C = 0$, the equation represents a [rectangular hyperbola](#).

- **Izdelaj Arhimedov elipsograf za risanje elipse.**



- **Reši nalogo o stožnicah iz mature ljubljanskih gimnazijcev iz leta 1894.**

f) Aus der Mathematik: 1.) Jemand zahlt einer Rentenbank 16.000 fl., bezieht aber nur durch 10 Jahre eine decursive Rente von 2000 fl. Wie viel hat er nach dieser Zeit zu fordern und wie lange müsste er diesen Rest anliegen lassen, damit er wieder auf 16.000 fl. steige, wenn jedesmal $4\frac{1}{2}\%$ Zinseszins gerechnet wird? — 2.) Von einer geraden Pyramide sind gegeben: die Seitenkante $s = 1.4\ m$, von der Grundfläche, welche ein Dreieck ist, eine Seite $a = 0.7\ m$, der gegenüberliegende Winkel $\alpha = 57^\circ 54' 44''$ und die beiden anderen Seiten verhalten sich wie 4:3. Wie groß ist der Radius der inhaltsgleichen Kugel? — 3.) Durch den Brennpunkt der Parabel $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 50x - 100y + 50 = 0$ ziehe man eine Sehne, welche zu der im Endpunkte des Parameters errichteten Tangente parallel ist. Wie lautet die Gleichung dieser Sehne und welche Fläche schneidet diese Sehne ab?

Skozi gorišče parabole $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 50x - 100y + 50 = 0$ poteka tetiva, ki je vzporedna tangenti skozi krajišče parametra. Poišči enačbo nosilke tetive in ploščino odseka, ki ga ta tetiva odreže od parabole.



- Obravnavaj stožnice v drugih razdaljah (metrikah) in izdelaj ustrezne modele v GeoGebri, na primer za elipso in parabolo v taksi razdalji.

